



UNIVERSITATEA "ALEXANDRU IOAN CUZA" DIN IAȘI
Facultatea de Matematică

Rezumatul tezei de doctorat

PROBLEME MATEMATICE ÎN MECANICA
MEDIILOR CONTINUE

Coordonator științific:
Prof. Dr. Stan Chiriță

Doctorand:
Andreea-Valentina Bucur

Iași, 2016

Cuprins

Introducere	1
1 Medii termovâscoelastice poroase	3
1.1 Preliminarii	3
1.2 Ecuațiile teoriei neliniare	4
1.3 Ecuații constitutive	4
1.4 Teoria liniară	4
1.5 Unicitatea soluției	7
2 Existența și unicitatea soluției în medii termovâscoelastice poroase	8
2.1 Formularea problemei la limită cu valori inițiale	8
2.2 Existența și unicitatea soluției	9
3 Problema comportării spațiale în medii termovâscoelastice poroase	11
3.1 Ipoteze constitutive. Rezultate auxiliare	11
3.2 Comportarea spațială a soluției	12
4 Probleme nestandard în medii termovâscoelastice poroase	15
4.1 Formularea problemei nestandard	15
4.2 Comportarea spațială a soluției	16
4.3 Comentarii	17
5 Problema comportării spațiale pentru probleme la limită cu valori finale	19
5.1 Formularea problemei la limită cu valori finale	19
5.2 Rezultate auxiliare	20
5.3 Comportarea spațială a soluției	20
6 Propagarea undelor în medii termoelastice poroase	22
6.1 Ecuațiile teoriei liniare a mediilor termoelastice poroase	22
6.2 Unde armonice plane	23
6.2.1 Simulări numerice	24
6.3 Propagarea undelor de suprafață Rayleigh	25

6.3.1	Simulări numerice	26
7	Propagarea undelor în medii termovâscoelastice poroase	28
7.1	Propagarea undelor Rayleigh în medii termovâscoelastice poroase anizotrope și neomogene	28
7.2	Propagarea undelor Rayleigh în medii termovâscoelastice poroase izotrope și neomogene	29
7.3	Propagarea undelor Rayleigh în medii termovâscoelastice poroase izotrope și omogene	30
7.3.1	Simulări numerice	31
	Bibliografie	33

Introducere

În ultimii ani s-a acordat o atenție deosebită teoriilor generalizate ale mecanicii mediilor continue existând numeroase lucrări dedicate acestui subiect.

Teoria mediilor termoelastice poroase este o generalizare a teoriei clasice a termoeasticității și a fost studiată de Ieșan [15]. Aceste materiale prezintă o microstructură cu o proprietate importantă: densitatea de masă în fiecare punct al materialului poate fi scrisă ca produsul dintre densitatea materialului matriță și funcția porozitate. Această reprezentare a densității este una importantă deoarece introduce un grad nou de libertate cinematică. Ieșan [16] a introdus teoria mediilor termovâscoelastice poroase. Această teorie reprezintă o extindere a teoriei mediilor termoelastice poroase, incluzând derivata în raport cu timpul a tensorului de deformare și derivata în raport cu timpul a gradientului funcției porozitate într-un set de variabile constitutive independente.

Această lucrare este consacrată studiului unor probleme matematice asociate cu două medii continue generalizate: mediile termoelastice poroase și mediile termovâscoelastice poroase. Mai precis, sunt prezentate unele rezultate ale autorului ce se referă la problema existenței și a unicității soluției în medii termovâscoelastice poroase, la problema comportării spațiale a soluției problemei la limită cu valori inițiale asociată modelului termovâscoelastic poros, precum și la problema comportării spațiale pentru două tipuri de probleme nestandard: prima este cea în care datele la momentul final sunt considerate proporționale cu cele de la momentul inițial, iar al doilea tip este cel al problemelor la limită cu valori finale, pentru care sunt date condițiile finale la momentul $t=0$. De asemenea, este studiată problema propagării undelor de suprafață Rayleigh atât pentru cazul mediilor termoelastice poroase cât și pentru cel al mediilor termovâscoelastice poroase.

Primul capitol al acestei lucrări are caracter introductiv și este consacrat prezentării teoriei mediilor termovâscoelastice poroase. Capitolul 2 este dedicat studiului problemei existenței și a unicității soluției unei probleme la limită cu valori inițiale din teoria mediilor termovâscoelastice poroase. Vom utiliza unele rezultate din teoria semigrupurilor de operatori liniari pentru a demonstra rezultatele principale. Rezultatele prezentate în acest capitol au fost incluse în lucrarea [5].

În Capitolul 3 se studiază problema comportării spațiale a soluției problemei la limită cu valori inițiale asociată modelului termovâscoelastic poros. Cu ajutorul unei măsuri ponderate a soluției, sunt stabilite estimări de tipul Saint-Venant, pentru

domenii mărginite, și estimări de tipul Phragmén-Lindelöf, pentru cazul domeniilor nemărginite. Rezultatele prezentate în cadrul acestui capitol au fost publicate în lucrarea [3].

În Capitolul 4 considerăm o problemă nestandard pentru un cilindru prismatic alcătuit dintr-un material termovâscoelastic poros. Comportarea spațială a soluției este studiată cu ajutorul unei integrale evaluată pe secțiunea transversală a cilindrului. Rezultatele prezentate în acest capitol au fost publicate în lucrarea [2].

Capitolul 5 este consacrat studiului comportării spațiale a soluției unei probleme la limită cu valori finale asociată modelului termovâscoelastic poros. Comportarea spațială a soluției este studiată cu ajutorul unei funcționale asociată procesului termovâscoelastic poros. În termenii acestei funcționale sunt determinate estimări de descreștere spațială de tipul Saint-Venant. Rezultatele obținute în acest capitol au fost publicate în lucrarea [6].

Capitolul 6 este consacrat studiului problemei propagării undelor de suprafață asociată modelului termoelastic poros. Sunt prezentate pentru început ecuațiile teoriei liniare, iar apoi se studiază comportarea undelor armonice plane. De asemenea, este studiată problema propagării undelor de suprafață Rayleigh pentru cazul unui semi-spațiu alcătuit dintr-un material termoelastic poros, izotrop și omogen. Conținutul acestui capitol a fost publicat de către autor în lucrarea [7].

În Capitolul 7 este tratată problema propagării undelor de suprafață Rayleigh pentru un semi-spațiu alcătuit dintr-un material termovâscoelastic poros gradat exponențial. Sunt tratate cazurile mediilor termovâscoelastice poroase anizotrope și neomogene, izotrope și neomogene, și izotrope și omogene. Pentru ultimul caz sunt prezentate unele simulări numerice pentru a evidenția mai bine rezultatele teoretice obținute. Rezultatele prezentate în acest capitol au fost incluse în lucrarea [4].

La realizarea acestei lucrări autorul a beneficiat de suportul oferit de Programul Operațional Sectorial pentru Dezvoltarea Resurselor Umane 2007-2013 și de Ministerul Educației Naționale și Cercetării Științifice prin proiectele:

- POSDRU/159/1.5/S/137750 – director Prof. Dr. Gheorghe Aniculăesei;
- PN-II-RU-TE-2014-4-0320 – director Asist. Dr. Ionel-Dumitrel Ghiba.

Capitolul 1

Medii termovâscoelastice poroase

În acest capitol vom prezenta ecuațiile ce descriu comportarea mediilor termovâscoelastice poroase [16]. În prima parte vom formula principiile termodinamicii și vom deduce ecuațiile teoriei neliniare a mediilor termovâscoelastice poroase. Vom prezenta apoi ecuațiile constitutive caracteristice acestor tipuri de medii și vom deduce ecuațiile teoriei liniare. În ultima parte a acestui capitol vom prezenta un rezultat de unicitate a soluției în contextul teoriei liniare a mediilor termovâscoelastice poroase.

1.1 Preliminarii

Considerăm un corp alcătuit dintr-un material termovâscoelastic poros, care la momentul t_0 ocupă regiunea B a spațiului Euclidian tridimensional. Configurația corpului la momentul t_0 se consideră drept configurație de referință. Vom referi mișcarea corpului B la configurația de referință și la un sistem fix de coordonate carteziene OX_K , $K = 1, 2, 3$.

Presupunem că mediul este deformat astfel încât la momentul t el va ocupa domeniul $\mathcal{B}$ de frontieră $\partial\mathcal{B}$, punctul M_0 ajungând în poziția M din $\mathcal{B}$. Domeniul $\mathcal{B}$ se numește configurație actuală. Raportăm mediul care ocupă domeniul $\mathcal{B}$ la un alt sistem de coordonate carteziene rectangulare, fix, $O'x_i$, $i = 1, 2, 3$.

Între B și $\mathcal{B}$ este stabilită o corespondență biunivocă și bicontinuu în care se corespund punctele M_0 din B și punctele M din $\mathcal{B}$.

Definim deformarea mediului prin relațiile

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t), \quad (\mathbf{X}, t) \in \overline{B} \times (t_0, t_1), \quad (1.1.1)$$

unde (t_0, t_1) este un interval de timp fixat, cu $t_0 \geq 0$ și $t_1 > t_0$. În cele ce urmează, vom presupune că funcțiile $\mathbf{x}$ sunt de clasă C^p , $p \geq 2$, în raport cu variabilele de care depind și că are loc următoarea relație

$$J = \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_K} \right) > 0, \quad (1.1.2)$$

în $B \times (t_0, t_1)$. Coordonatele X_K se numesc coordonate lagrangeiene sau coordonate materiale, iar variabilele x_i se numesc coordonate euleriene sau coordonate spațiale.

1.2 Ecuațiile teoriei neliniare

Conceptul de corp distribuit a fost utilizat pentru prima dată de către Goodman și Cowin [14] pentru a descrie materialele de tip granular. Teoria prezentată în [14] se bazează pe introducerea unei noi variabile cinematice ν , definită ca raportul dintre densitatea de masă a materialului, ρ , și densitatea materialului matriță, $\hat{\rho}$, în forma

$$\rho = \nu \hat{\rho}. \quad (1.2.1)$$

Această reprezentare este una importantă deoarece introduce un grad de libertate în plus, descris de funcția porozitate, ν , și care este o măsură a variației volumului mediului rezultată prin contractia sau dilatarea porilor.

Relația (1.2.1) are loc și în configurația de referință. Prin urmare, vom avea

$$\rho_0 = \nu_0 \hat{\rho}_0, \quad (1.2.2)$$

unde ρ_0 reprezintă densitatea de masă la momentul t_0 , $\hat{\rho}_0$ este densitatea materialului matriță la momentul t_0 , iar ν_0 reprezintă fracția volumetrică la momentul t_0 .

1.3 Ecuații constitutive

Două corpuri de aceeași formă și aceeași masă pot avea comportări diferite atunci când sunt supuse la aceleași solicitări. Așadar, sunt necesare anumite relații care să definească diverse clase de materiale. Aceste relații se numesc ecuații constitutive sau relații constitutive. În această secțiune sunt prezentate ecuațiile constitutive care descriu comportarea mediilor termovâscoelastice poroase.

1.4 Teoria liniară

În cele ce urmează, vom prezenta ecuațiile teoriei liniare a mediilor termovâscoelastice poroase [16]. Introducem notațiile

$$X_i = \delta_{iK} X_K, \quad f_{,i} = \frac{\partial f}{\partial X_i},$$

unde δ_{iK} reprezintă simbolul lui Kronecker. De asemenea, introducem următoarele notații

$$u_i = x_i - X_i, \quad \varphi = \nu - \nu_0, \quad \theta = T - T_0, \quad (1.4.1)$$

unde T_0 reprezintă temperatura absolută a corpului în configurația de referință.

În teoria liniară se presupune că deplasarea, funcția porozitate și temperatura sunt cantități mici ce se pot scrie în următoarea formă [17]

$$\mathbf{u} = \varepsilon \mathbf{u}', \quad \varphi = \varepsilon \varphi', \quad \theta = \varepsilon \theta', \quad (1.4.2)$$

unde ε este o constantă suficient de mică ale cărei puteri mai mari sau egale cu 2 sunt neglijate, iar $\mathbf{u}', \varphi'$ și θ' sunt independente de ε . În baza acestei scrieri, tensorul de deformare al lui Lagrange se reduce la

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (1.4.3)$$

Ecuatiile de bază ale teoriei liniare a mediilor termovâscoelastice poroase sunt date de ecuațiile de mișcare

$$t_{ji,j} + \rho_0 f_i = \rho_0 \ddot{u}_i, \quad (1.4.4)$$

în $B \times (t_0, t_1)$, ecuația forțelor de echilibrare

$$H_{j,j} + g + \rho_0 \ell = \rho_0 \kappa \ddot{\varphi}, \quad (1.4.5)$$

în $B \times (t_0, t_1)$, ecuația energiei

$$\rho_0 T_0 \dot{\eta} = Q_{j,j} + \rho_0 S, \quad (1.4.6)$$

în $B \times (t_0, t_1)$, ecuațiile constitutive

$$\begin{aligned} t_{ij} &= C_{ijrs} e_{rs} + B_{ij} \varphi + D_{ijk} \varphi_{,k} - \beta_{ij} \theta + S_{ij}^*, \\ H_i &= A_{ij} \varphi_{,j} + D_{rsi} e_{rs} + d_i \varphi - a_i \theta + H_i^*, \\ g &= -B_{ij} e_{ij} - \xi \varphi - d_i \varphi_{,i} + m \theta + g^*, \\ \rho \eta &= \beta_{ij} e_{ij} + a \theta + m \varphi + a_i \varphi_{,i}, \\ Q_i &= k_{ij} \theta_{,j} + f_{irs} \dot{e}_{rs} + b_i \dot{\varphi} + a_{ij} \dot{\varphi}_{,j}, \end{aligned} \quad (1.4.7)$$

unde S_{ij}^* , H_i^* și g^* sunt date de relațiile

$$\begin{aligned} S_{ij}^* &= C_{ijrs}^* \dot{e}_{rs} + B_{ij}^* \dot{\varphi} + D_{ijk}^* \dot{\varphi}_{,k} + M_{ijk}^* \theta_{,k}, \\ H_i^* &= A_{ij}^* \dot{\varphi}_{,j} + G_{rsi}^* \dot{e}_{rs} + d_i^* \dot{\varphi} + P_{ij}^* \theta_{,j}, \\ g^* &= -F_{ij}^* \dot{e}_{ij} - \xi^* \dot{\varphi} - \gamma_k^* \dot{\varphi}_{,k} - R_j^* \theta_{,j}. \end{aligned} \quad (1.4.8)$$

Coeficienții C_{ijrs} , B_{ij} , ..., R_j^* se numesc coeficienți constitutivi și verifică următoarele relații de simetrie

$$\begin{aligned} C_{ijrs} &= C_{jirs} = C_{rsij}, \quad \beta_{ij} = \beta_{ji}, \quad D_{ijk} = D_{jik}, \quad A_{ij} = A_{ji}, \quad B_{ij} = B_{ji}, \\ C_{ijrs}^* &= C_{jirs}^* = C_{rsij}^*, \quad B_{ij}^* = B_{ji}^*, \quad D_{ijk}^* = D_{jik}^*, \quad M_{ijk}^* = M_{jik}^*, \quad A_{ij}^* = A_{ji}^*, \\ G_{rsi}^* &= G_{sri}^*, \quad P_{ij}^* = P_{ji}^*, \quad F_{ij}^* = F_{ji}^*, \quad k_{ij} = k_{ji}, \quad f_{irs} = f_{isr}. \end{aligned} \quad (1.4.9)$$

În teoria liniară densitatea de energie internă este definită astfel

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2} \left(C_{ijrs} e_{ij} e_{rs} + A_{ij} \varphi_{,i} \varphi_{,j} + \xi \varphi^2 + 2B_{ij} \varphi e_{ij} + 2D_{ijk} e_{ij} \varphi_{,k} + 2d_i \varphi \varphi_{,i} \right). \quad (1.4.10)$$

De asemenea, are loc și următoarea inegalitate de disipare a energiei

$$\begin{aligned} \Lambda(\dot{e}_{ij}, \dot{\varphi}, \dot{\varphi}_{,j}, \theta_{,k}) &\equiv C_{ijrs}^* \dot{e}_{ij} \dot{e}_{rs} + A_{ij}^* \dot{\varphi}_{,i} \dot{\varphi}_{,j} + \xi^* \varphi^2 + \frac{1}{T_0} k_{ij} \theta_{,i} \theta_{,j} + (B_{ij}^* + F_{ij}^*) \dot{e}_{ij} \dot{\varphi} \\ &\quad + \left(D_{ijk}^* + G_{ijk}^* \right) \dot{e}_{ij} \dot{\varphi}_{,k} + \left(M_{ijk}^* + \frac{1}{T_0} f_{kij} \right) \dot{e}_{ij} \theta_{,k} + (d_i^* + \gamma_i^*) \dot{\varphi} \dot{\varphi}_{,i} \\ &\quad + \left(R_j^* + \frac{1}{T_0} b_j \right) \theta \dot{\varphi} + \left(P_{ij}^* + \frac{1}{T_0} a_{ji} \right) \dot{\varphi}_{,j} \theta_{,i} \geq 0. \end{aligned} \quad (1.4.11)$$

În cazul materialelor termovâscoelastice poroase izotrope, ecuațiile constitutive devin

$$\begin{aligned} t_{ij} &= \lambda e_{rr} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} + b\varphi \delta_{ij} - \beta \theta \delta_{ij} + \lambda^* \dot{e}_{rr} \delta_{ij} + 2\mu^* \dot{e}_{ij} + b^* \dot{\varphi} \delta_{ij}, \\ H_i &= \alpha \varphi_{,i} + \alpha^* \dot{\varphi}_{,i} + \tau^* \theta_{,i}, \\ g &= -b e_{rr} - \xi \varphi + m\theta - \gamma^* \dot{e}_{rr} - \xi^* \dot{\varphi}, \\ \rho_0 \eta &= \beta e_{rr} + a\theta + m\varphi, \\ Q_i &= k\theta_{,i} + \zeta \dot{\varphi}_{,i}, \end{aligned} \quad (1.4.12)$$

unde $\lambda, \mu, \dots, \xi^*$ sunt coeficienți constitutivi, iar δ_{ij} reprezintă simbolul lui Kronecker.

Conform relației (1.4.12), pentru cazul materialelor izotrope, inegalitatea de disipare a energiei (1.4.11) implică următoarele condiții

$$3\lambda^* + 2\mu^* \geq 0, \quad \mu^* \geq 0, \quad \alpha^* \geq 0, \quad k \geq 0, \quad \xi^* \geq 0, \quad T_0 \left(\tau^* + \frac{1}{T_0} \zeta \right)^2 \leq 4\alpha^* k. \quad (1.4.13)$$

Atașăm ecuațiilor de mai sus următoarele condiții inițiale

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{X}, 0) &= u_i^0(\mathbf{X}), \quad \varphi(\mathbf{X}, 0) = \varphi^0(\mathbf{X}), \quad \theta(\mathbf{X}, 0) = \theta^0(\mathbf{X}), \\ \dot{u}_i(\mathbf{X}, 0) &= v_i^0(\mathbf{X}), \quad \dot{\varphi}(\mathbf{X}, 0) = \phi^0(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \overline{B}, \end{aligned} \quad (1.4.14)$$

și următoarele condiții la frontieră

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{X}, t) &= \tilde{u}_i(\mathbf{X}, t), \quad \text{pe } \overline{\Sigma}_1 \times (t_0, t_1), \quad t_{ji}(\mathbf{X}, t) n_j = \tilde{t}_i(\mathbf{X}, t), \quad \text{pe } \Sigma_2 \times (t_0, t_1), \\ \varphi(\mathbf{X}, t) &= \tilde{\varphi}(\mathbf{X}, t), \quad \text{pe } \overline{\Sigma}_3 \times (t_0, t_1), \quad H_i(\mathbf{X}, t) n_i = \tilde{H}(\mathbf{X}, t), \quad \text{pe } \Sigma_4 \times (t_0, t_1), \\ \theta(\mathbf{X}, t) &= \tilde{\theta}(\mathbf{X}, t), \quad \text{pe } \overline{\Sigma}_5 \times (t_0, t_1), \quad Q_i(\mathbf{X}, t) n_i = \tilde{Q}(\mathbf{X}, t), \quad \text{pe } \Sigma_6 \times (t_0, t_1), \end{aligned} \quad (1.4.15)$$

unde $u_i^0, \varphi^0, \theta^0, v_i^0, \phi^0, \tilde{u}_i, \tilde{t}_i, \tilde{\varphi}, \tilde{H}, \tilde{\theta}$ și $\tilde{Q}$ sunt funcții prescrise, iar Σ_k , ($k = 1, 2, \dots, 6$) sunt suprafețe incluse în ∂B , care îndeplinesc proprietățile $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \Sigma_3 \cap \Sigma_4 = \Sigma_5 \cap \Sigma_6 = \emptyset$ și $\overline{\Sigma}_1 \cup \Sigma_2 = \overline{\Sigma}_3 \cup \Sigma_4 = \overline{\Sigma}_5 \cup \Sigma_6 = \partial B$.

Dacă considerăm cazul materialelor termovâscoelastice poroase izotrope și omogene, atunci ecuațiile (1.4.4)-(1.4.6) conduc la

$$\begin{aligned}\mu_1 \Delta u_i + (\lambda_1 + \mu_1) u_{j,ji} + b_1 \varphi_{,i} - \beta \theta_{,i} + \rho_0 f_i &= \rho_0 \ddot{u}_i, \\ \alpha_1 \Delta \varphi - \gamma_1 u_{j,j} - \xi_1 \varphi + \Gamma_1 \theta + \rho_0 \ell &= \rho_0 \kappa \ddot{\varphi}, \\ k \Delta \theta - \beta T_0 \dot{u}_{j,j} + \Gamma_2 \varphi + \rho_0 S &= c \dot{\theta},\end{aligned}\tag{1.4.16}$$

unde

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \lambda + \lambda^* \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mu_1 = \mu + \mu^* \frac{\partial}{\partial t}, \quad b_1 = b + b^* \frac{\partial}{\partial t}, \quad \alpha_1 = \alpha + \alpha^* \frac{\partial}{\partial t}, \\ \gamma_1 &= b + \gamma^* \frac{\partial}{\partial t}, \quad \xi_1 = \xi + \xi^* \frac{\partial}{\partial t}, \quad \Gamma_1 = \tau^* \Delta + m, \quad \Gamma_2 = (\zeta \Delta - m T_0) \frac{\partial}{\partial t},\end{aligned}\tag{1.4.17}$$

$c = a T_0$, iar Δ reprezintă operatorul lui Laplace.

Vom nota cu $(\mathcal{P})$ problema la limită cu valori inițiale asociată modelului termovâscoelastic poros definită de ecuațiile de bază (1.4.4)-(1.4.6), condițiile la limită (1.4.15) și condițiile inițiale (1.4.14).

1.5 Unicitatea soluției

Teorema 1.5.1. *Presupunem că*

- (i) ρ_0, κ și a sunt funcții strict pozitive;
- (ii) $\mathcal{W}$ este o formă pătratică pozitiv semidefinită;
- (iii) coeficienții constitutivi satisfac relațiile de simetrie (1.4.9) și inegalitatea de disipare a energiei (1.4.11). Atunci, problema la limită cu valori inițiale $(\mathcal{P})$ asociată teoriei liniare a mediilor termovâscoelastice poroase admite cel mult o soluție.

Capitolul 2

Existența și unicitatea soluției în medii termovâscoelastice poroase

Acest capitol este consacrat studiului existenței și a unicității soluției problemei la limită asociată modelului termovâscoelastic poros. Utilizând unele rezultate din teoria semigrupurilor de operatori liniari, vom reformula problema la limită ca o problemă Cauchy abstractă într-un spațiu Hilbert potrivit ales și vom stabili un rezultat de existență și unicitate a soluției. De asemenea, vom deduce o estimare ce descrie dependența continuă a soluției în raport cu datele inițiale și în raport cu încărcările. Rezultatele prezentate în acest capitol au fost incluse în [5].

2.1 Formularea problemei la limită cu valori inițiale

În cadrul acestui capitol, vom considera că regiunea B este alcătuită dintr-un material termovâscoelastic poros anizotrop și neomogen. Vom nota cu $(\mathcal{P})$ problema la limită cu valori inițiale definită de ecuațiile (1.4.4)-(1.4.6), de condițiile la limită

$$u_i(\mathbf{X}, t) = 0, \quad \varphi(\mathbf{X}, t) = 0, \quad \theta(\mathbf{X}, t) = 0, \quad \text{pe } \partial B \times (0, \infty), \quad (2.1.1)$$

și de condițiile inițiale

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{X}, 0) &= u_i^0(\mathbf{X}), \quad \varphi(\mathbf{X}, 0) = \varphi^0(\mathbf{X}), \quad \theta(\mathbf{X}, 0) = \theta^0(\mathbf{X}), \\ \dot{u}_i(\mathbf{X}, 0) &= v_i^0(\mathbf{X}), \quad \dot{\varphi}(\mathbf{X}, 0) = \psi^0(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \overline{B}, \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

unde $u_i^0, \varphi^0, \theta^0, v_i^0$ și ψ^0 sunt funcții continue prescrise.

Presupunem că energia internă $\mathcal{W}$ este o formă pătratică pozitiv definită în termenii lui e_{ij}, φ și $\varphi_{,k}$ și că ρ_0, κ , și a satisfac

$$\rho_0 > 0, \quad \kappa(\mathbf{X}) \geq \kappa_0 > 0, \quad a(\mathbf{X}) \geq a_0 > 0, \quad \forall \mathbf{X} \in \overline{B}. \quad (2.1.3)$$

În cele ce urmează, vom nota cu $(\mathcal{P}')$ problema la limită adimensionalizată. Putem observa cu ușurință că problema $(\mathcal{P}')$ este analoagă cu problema $(\mathcal{P})$.

2.2 Existența și unicitatea soluției

În această secțiune vom folosi unele rezultate din teoria semigrupurilor de operatori liniari [19] pentru a demonstra existența și unicitatea soluției problemei $(\mathcal{P}')$. Pentru început, vom reformula problema $(\mathcal{P}')$ ca o problemă Cauchy abstractă într-un spațiu Hilbert convenabil. În acest scop definim

$$\mathcal{H} = \{\omega = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \varphi, \psi, \theta) \mid \mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1(B), \varphi \in H_0^1(B), \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(B), \psi, \theta \in L^2(B)\}, \quad (2.2.1)$$

unde $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}$, $\psi = \dot{\varphi}$, $\mathbf{H}_0^1(B) = [H_0^1(B)]^3$, $\mathbf{L}^2(B) = [L^2(B)]^3$, iar $H_0^m(B)$ este spațiul Sobolev cunoscut [1]. De asemenea, introducem următorii operatori

$$\begin{aligned} A_i^1 \omega &= v_i, \quad B^1 \omega = \psi, \\ A_i^2 \omega &= \frac{1}{\rho_0} \left(C_{ijrs} u_{r,s} + B_{ij} \varphi + D_{ijk} \varphi_{,k} - \beta_{ij} \theta + C_{ijrs}^* v_{r,s} + B_{ij}^* \psi \right. \\ &\quad \left. + D_{ijk}^* \psi_{,k} + M_{ijk}^* \theta_{,k} \right)_{,j}, \\ B^2 \omega &= \frac{1}{\rho_0 \kappa} \left(A_{ij} \varphi_{,i} + D_{rsj} u_{r,s} + d_j \varphi - a_j \theta + A_{ij}^* \psi_{,i} + G_{rsj}^* v_{r,s} \right. \\ &\quad \left. + d_j^* \psi + P_{ij}^* \theta_{,i} \right)_{,j} - \frac{1}{\rho_0 \kappa} \left(B_{ij} u_{i,j} + \xi \varphi + d_i \varphi_{,i} - m \theta + F_{ij}^* v_{i,j} \right. \\ &\quad \left. + \xi^* \psi + \gamma_k^* \psi_{,k} + R_j^* \theta_{,j} \right), \\ C \omega &= \frac{1}{a T_0} \left(k_{ij} \theta_{,i} + f_{jrs} v_{r,s} + b_j \psi + a_{ji} \psi_{,i} \right)_{,j} - \frac{1}{a} \left(\beta_{ij} v_{i,j} + m \psi + a_i \psi_{,i} \right). \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Vom nota cu $\mathcal{A}$ operatorul definit de

$$\mathcal{A} \omega = (A_i^1 \omega, A_i^2 \omega, B^1 \omega, B^2 \omega, C \omega), \quad (2.2.3)$$

al cărui domeniu este

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{\omega = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \varphi, \psi, \theta) \in \mathcal{H} \mid \mathcal{A} \omega \in \mathcal{H}, \mathbf{u} = \mathbf{0}, \varphi = 0, \theta = 0 \text{ pe } \partial B\}.$$

Așadar, cu notațiile de mai sus, vom obține următoarea problemă Cauchy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \omega(t) &= \mathcal{A} \omega(t) + \mathcal{G}(t), \\ \omega(0) &= \omega^0, \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

unde $\omega = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \varphi, \psi, \theta)$, $\mathcal{G}(t) = \left(\mathbf{0}, \mathbf{f}, 0, \frac{1}{\kappa} \ell, \frac{\rho_0}{a T_0} S \right)$, $\omega^0 = (\mathbf{u}^0, \mathbf{v}^0, \varphi^0, \psi^0, \theta^0)$, $\mathbf{f} = (f_i)$, $\mathbf{u}^0 = (u_i^0)$, iar $\mathbf{v}^0 = (v_i^0)$, $i = 1, 2, 3$.

Introducem următorul produs scalar în $\mathcal{H}$

$$\langle \omega, \omega^* \rangle_{\mathcal{H}} = \int_B \left[\rho_0 v_i v_i^* + \rho_0 \kappa \psi \psi^* + a \theta \theta^* + 2\mathcal{F}(\mathcal{U}_{\mathcal{T}}, \mathcal{U}_{\mathcal{T}}^*) \right] dv, \quad \forall \omega, \omega^* \in \mathcal{H}, \quad (2.2.5)$$

unde $\mathcal{U}_{\mathcal{T}} = \{\mathbf{u}, \varphi\}$, $\mathcal{U}_{\mathcal{T}}^* = \{\mathbf{u}^*, \varphi^*\}$, iar

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathcal{U}_{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{U}}_{\mathcal{T}}) = & \frac{1}{2} C_{ijrs} u_{i,j} \tilde{u}_{r,s} + \frac{1}{2} \xi \varphi \tilde{\varphi} + \frac{1}{2} A_{ij} \varphi_{,i} \tilde{\varphi}_{,j} + \frac{1}{2} B_{ij} (u_{i,j} \tilde{\varphi} + \tilde{u}_{i,j} \varphi) \\ & + \frac{1}{2} D_{ijk} (u_{i,j} \tilde{\varphi}_{,k} + \tilde{u}_{i,j} \varphi_{,k}) + \frac{1}{2} d_i (\varphi \tilde{\varphi}_{,i} + \tilde{\varphi} \varphi_{,i}). \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Lema 2.2.1. *Produsul scalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ definește o normă echivalentă cu norma uzuală din spațiul $\mathcal{H}$.*

Lema 2.2.2. *Operatorul $\mathcal{A}$, definit de relația (2.2.3), este disipativ, adică*

$$\langle \mathcal{A}\omega, \omega \rangle_{\mathcal{H}} \leq 0, \quad \text{pentru orice } \omega \in \mathcal{D}(\mathcal{A}). \quad (2.2.7)$$

Lema 2.2.3. *Operatorul $\mathcal{A}$ satisface condiția*

$$\text{Range}(I - \mathcal{A}) = \mathcal{H}. \quad (2.2.8)$$

Teorema 2.2.1. *Operatorul $\mathcal{A}$ definit de relația (2.2.3) generează un $\mathcal{C}_0$ -semigrup de contracții în spațiul Hilbert $\mathcal{H}$.*

Teorema 2.2.2. *Presupunem că $\mathbf{f} \in C^1([0, \infty); \mathbf{L}^2(B))$, $\ell, S \in C^1([0, \infty); L^2(B))$, $\omega^0 = (\mathbf{u}^0, \mathbf{v}^0, \varphi^0, \psi^0, \theta^0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, iar densitatea de energie internă este o formă pătratică pozitiv definită în termenii corespunzători. Atunci, există o soluție unică a problemei Cauchy abstracte (2.2.4) care satisface*

$$\omega = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \varphi, \psi, \theta) \in C^1((0, \infty); \mathcal{H}) \cap C^0([0, \infty); \mathcal{D}(\mathcal{A})).$$

Următoarea teoremă descrie dependența continuă a soluției problemei $(\mathcal{P}')$ în raport cu datele inițiale și în raport cu încărcări masice.

Teorema 2.2.3. *Dacă $\mathbf{f} \in C^1([0, \infty); \mathbf{L}^2(B))$, $\ell, S \in C^1([0, \infty); L^2(B))$, $\omega^0 = (\mathbf{u}^0, \mathbf{v}^0, \varphi^0, \psi^0, \theta^0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ și densitatea de energie internă este o formă pătratică pozitiv definită în termenii corespunzători, atunci are loc următoarea estimare*

$$\|\omega(t)\|_{\mathcal{H}} \leq \tilde{C} \left(\|\omega^0(t)\|_{\mathcal{H}} + \int_0^t \left(\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}^2(B)} + \|\ell\|_{L^2(B)} + \|S\|_{L^2(B)} \right) ds \right), \quad (2.2.9)$$

unde $\tilde{C}$ este o constantă pozitivă.

Capitolul 3

Problema comportării spațiale în medii termovâscoelastice poroase

Acest capitol este dedicat studiului comportării spațiale a soluției problemei la limită cu valori inițiale asociată modelului termovâscoelastic poros. În acest scop, vom considera două funcționale asociate procesului termovâscoelastic poros. În termenii acestor funcționale vom stabili estimări de creștere și de descreștere exponențială. Mai precis, pentru cazul domeniilor mărginite vom deduce estimări de tipul Saint-Venant, în timp ce pentru domenii nemărginite vom stabili estimări alternative de tipul Phragmén-Lindelöf. Aceste rezultate originale ale autorului au fost publicate în lucrarea [3].

3.1 Ipoteze constitutive. Rezultate auxiliare

Pe parcursul acestui capitol, vom considera că regiunea B este alcătuită dintr-un material termovâscoelastic poros, anizotrop și neomogen. Presupunem că ρ_0, κ și a sunt funcții strict pozitive pe $\overline{B}$, și că energia de disipare și energia internă sunt forme pătratice pozitiv definite în termenii corespunzători.

Sub aceste ipoteze, stabilim următoarele rezultate:

Lema 3.1.1. *Dacă $\mathcal{U} = \{u_i, \varphi, \theta\}$ este o soluție a problemei la limită cu valori inițiale $(\mathcal{P})$, atunci pentru orice ε , constantă pozitivă, are loc inegalitatea*

$$t_{ij}t_{ij} + \frac{1}{\kappa_0}H_iH_i \leq 4\mu_M(1 + \varepsilon)\mathcal{W}(\mathcal{U}) + 2\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)M^2\theta^2 + 2\alpha_M\Lambda_1(\mathcal{U}), \quad (3.1.1)$$

unde

$$\Lambda_1(\mathcal{U}) = \frac{\mu_m^*}{2}\dot{e}_{ij}\dot{e}_{ij} + \frac{\nu_m^*}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{a_m^*}{2}\kappa_0\dot{\varphi}_{,i}\dot{\varphi}_{,i} + \frac{1}{2T_0}k_m\theta_{,i}\theta_{,i}. \quad (3.1.2)$$

Lema 3.1.2. *Fie $\mathcal{U} = \{u_i, \varphi, \theta\}$ o soluție a problemei la limită cu valori inițiale $(\mathcal{P})$. Atunci, pentru orice $\varepsilon' > 0$ are loc următoarea estimare*

$$Q_iQ_i \leq 2T_0K_M(1 + \varepsilon')\Lambda_2(\mathcal{U}) + \tilde{\alpha}_M\left(1 + \frac{1}{\varepsilon'}\right)\Lambda_3(\mathcal{U}), \quad (3.1.3)$$

unde

$$\Lambda_2(\mathcal{U}) = \frac{k_m}{2T_0} \theta_{,i} \theta_{,i}, \quad \Lambda_3(\mathcal{U}) = \frac{\mu_m^*}{2} \dot{e}_{ij} \dot{e}_{ij} + \frac{\nu_m^*}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{a_m^*}{2} \kappa_0 \dot{\varphi}_{,i} \dot{\varphi}_{,i}. \quad (3.1.4)$$

3.2 Comportarea spațială a soluției

Fie $\mathcal{U} = \{u_i, \varphi, \theta\}$ o soluție a problemei la limită cu valori inițiale ($\mathcal{P}$). Pentru un timp fixat $T > 0$, considerăm suportul $\widehat{D}_T$ al încărcărilor $\mathcal{L} = \{f_i, \ell, S, u_i^0, v_i^0, \varphi^0, \psi^0, \theta^0, \tilde{u}_i, \tilde{\varphi}, \tilde{\theta}, \tilde{t}_i, \tilde{H}, \tilde{Q}\}$ pe intervalul de timp $[0, T]$. Altfel spus, $\widehat{D}_T$ este mulțimea punctelor $\mathbf{X} \in \overline{B}$ astfel încât dacă $\mathbf{X} \in B$, atunci

$$\begin{aligned} u_i^0(\mathbf{X}) \neq 0 \text{ sau } v_i^0(\mathbf{X}) \neq 0 \text{ sau } \varphi^0(\mathbf{X}) \neq 0 \text{ sau } \psi^0(\mathbf{X}) \neq 0 \text{ sau } \theta^0(\mathbf{X}) \neq 0 \\ \text{sau } f_i(\mathbf{X}, s) \neq 0 \text{ sau } \ell(\mathbf{X}, s) \neq 0 \text{ sau } S(\mathbf{X}, s) \neq 0 \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

pentru cel puțin un timp $s \in [0, T]$, iar dacă $\mathbf{X} \in \partial B$, atunci

$$\begin{aligned} \tilde{u}_i(\mathbf{X}, s) \neq 0 \text{ sau } \tilde{t}_i(\mathbf{X}, s) \neq 0 \text{ sau } \tilde{\varphi}(\mathbf{X}, s) \neq 0 \text{ sau } \\ \tilde{H}(\mathbf{X}, s) \neq 0 \text{ sau } \tilde{\theta}(\mathbf{X}, s) \neq 0 \text{ sau } \tilde{Q}(\mathbf{X}, s) \neq 0 \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

pentru cel puțin un timp $s \in [0, T]$.

Presupunem că $\widehat{D}_T$ este un domeniu mărginit și regulat. Pentru fiecare $r \geq 0$, introducem mulțimea D_r prin

$$D_r = \left\{ \mathbf{X} \in \overline{B} : \widehat{D}_T \cap \overline{\Sigma(\mathbf{X}, r)} \neq \emptyset \right\}, \quad (3.2.3)$$

unde $\Sigma(\mathbf{X}, r)$ reprezintă bila deschisă de rază r și cu centrul în punctul $\mathbf{X}$. De asemenea, introducem următoarele mulțimi: $B_r = B \setminus D_r$, $B(r_1, r_2) = B_{r_2} \setminus B_{r_1}$, $r_1 \geq r_2$. Vom nota cu S_r partea suprafeței ∂B_r conținută în interiorul lui B și a cărei normală este îndreptată în exteriorul mulțimii D_r .

Observăm că pentru un domeniu mărginit, raza r variază între $[0, L]$, $L < \infty$, unde $L = \max \left\{ \min \left\{ [(X_j - Y_j)(X_j - Y_j)]^{1/2} : \mathbf{Y} \in \widehat{D}_T \right\} : \mathbf{X} \in \overline{B} \right\}$.

Pentru soluția $\mathcal{U} = \{u_i, \varphi, \theta\}$ a problemei la limită cu valori inițiale ($\mathcal{P}$), asociem următoarea funcțională [12]

$$\mathcal{I}(r, t) = - \int_0^t \int_{S_r} e^{-\sigma s} \left[t_{ji}(s) n_j \dot{u}_i(s) + H_i(s) n_i \dot{\varphi}(s) + \frac{1}{T_0} Q_i(s) n_i \theta(s) \right] dad s, \quad (3.2.4)$$

$\forall r \geq 0$, $t \in [0, T]$, unde σ este un parametru prescris, iar n_j reprezintă componentele normalei exterioare la suprafața S_r .

De asemenea, introducem și următoarea funcțională

$$\mathcal{J}(r, t) = \int_0^t \mathcal{I}(r, s) ds. \quad (3.2.5)$$

Următorul rezultat prezintă câteva proprietăți ale funcționalelor $\mathcal{I}(r, t)$ și $\mathcal{J}(r, t)$.

Teorema 3.2.1. Fie $\mathcal{U} = \{u_i, \varphi, \theta\}$ o soluție a problemei la limită $(\mathcal{P})$, corespunzătoare încărcărilor $\mathcal{L} = \{f_i, \ell, S, u_i^0, v_i^0, \varphi^0, \psi^0, \theta^0, \tilde{u}_i, \tilde{\varphi}, \tilde{\theta}, \tilde{t}_i, \tilde{H}, \tilde{Q}\}$, și fie $\hat{D}_T$ un domeniu mărginit. Pentru fiecare $t \in [0, T]$, fixat, funcționalele $\mathcal{I}(r, t)$ și $\mathcal{J}(r, t)$ satisfac:

(i) Pentru $0 \leq r_2 \leq r_1$, avem

$$\begin{aligned} & \mathcal{I}(r_1, t) - \mathcal{I}(r_2, t) \\ &= -\frac{1}{2} \int_{B(r_1, r_2)} e^{-\sigma t} \left[\rho_0 \dot{u}_i(t) \dot{u}_i(t) + \rho_0 \kappa \dot{\varphi}^2(t) + a\theta^2(t) + 2\mathcal{W}(\mathcal{U}(t)) \right] dv \\ & \quad - \int_0^t \int_{B(r_1, r_2)} \frac{\sigma}{2} e^{-\sigma s} \left[\rho_0 \dot{u}_i(s) \dot{u}_i(s) + \rho_0 \kappa \dot{\varphi}^2(s) + a\theta^2(s) \right. \\ & \quad \left. + 2\mathcal{W}(\mathcal{U}(s)) \right] dv ds - \int_0^t \int_{B(r_1, r_2)} e^{-\sigma s} \Lambda(\mathcal{U}(s)) dv ds; \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

(ii) $\mathcal{I}(r, t)$ este o funcțională continuu diferențiabilă în raport cu $r \geq 0$ ce satisface

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \mathcal{I}(r, t) &= -\frac{1}{2} \int_{S_r} e^{-\sigma t} \left[\rho_0 \dot{u}_i(t) \dot{u}_i(t) + \rho_0 \kappa \dot{\varphi}^2(t) + a\theta^2(t) + 2\mathcal{W}(\mathcal{U}(t)) \right] dv \\ & \quad - \int_0^t \int_{S_r} \frac{\sigma}{2} e^{-\sigma s} \left[\rho_0 \dot{u}_i(s) \dot{u}_i(s) + \rho_0 \kappa \dot{\varphi}^2(s) + a\theta^2(s) + 2\mathcal{W}(\mathcal{U}(s)) \right] dv ds \\ & \quad - \int_0^t \int_{S_r} e^{-\sigma s} \Lambda(\mathcal{U}(s)) dv ds; \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

(iii) Funcționalele $\mathcal{I}(r, t)$ și $\mathcal{J}(r, t)$ sunt descrescătoare în raport cu raza r ;

(iv) $\mathcal{I}(r, t)$ satisface următoarea inegalitate diferențială de ordinul întâi

$$\frac{\sigma}{\zeta} |\mathcal{I}(r, t)| + \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial r}(r, t) \leq 0, \quad r \geq 0, \quad (3.2.8)$$

unde

$$\zeta = \max \left\{ c, \frac{\sigma \alpha_M \varepsilon_1}{\rho_0} \right\}, \quad c = \sqrt{\frac{2\mu_M(1 + \varepsilon_0)}{\rho_0}}, \quad (3.2.9)$$

iar ε_0 este rădăcina pozitivă a următoarei ecuații algebrice

$$\varepsilon^2 + \left(1 - \frac{M^2}{a_0 \mu_M} - \frac{\sigma \rho_0 K_M}{2a_0 T_0 \mu_M} - \frac{\sigma \rho_0 \tilde{\alpha}_M}{4a_0 T_0^2 \mu_M} \right) \varepsilon - \frac{M^2}{a_0 \mu_M} = 0; \quad (3.2.10)$$

(v) $\mathcal{J}(r, t)$ satisface următoarea inegalitate diferențială de ordinul întâi

$$\sqrt{t} \tilde{\zeta}(t) \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial r}(r, t) + |\mathcal{J}(r, t)| \leq 0, \quad r \geq 0, \quad (3.2.11)$$

unde

$$\tilde{\zeta}(t) = \max \left\{ \gamma(t), \frac{\alpha_M \varepsilon_3}{\rho_0} \right\}, \quad \gamma(t) = \sqrt{\frac{2t\mu_M(1 + \delta(t))}{\rho_0}}, \quad (3.2.12)$$

iar $\delta(t)$ este rădăcina pozitivă a următoarei ecuații algebrice

$$\delta^2 + \left(1 - \frac{M^2}{a_0\mu_M} - \frac{\rho_0 K_M}{2a_0 T_0 \mu_M t} - \frac{\rho_0 \tilde{\alpha}_M}{4a_0 T_0^2 \mu_M t}\right) \delta - \frac{M^2}{a_0\mu_M} = 0; \quad (3.2.13)$$

(vi) Dacă B este un domeniu mărginit, atunci funcționalele $\mathcal{I}(r, t)$ și $\mathcal{J}(r, t)$ sunt pozitive.

Teorema 3.2.2. (Comportare spațială pentru domenii mărginite) Fie B un domeniu mărginit. Dacă $\mathcal{U} = \{u_i, \varphi, \theta\}$ este o soluție a problemei $(\mathcal{P})$ și dacă suportul datelor $\widehat{D}_T$ este mărginit, atunci, pentru fiecare $t \in [0, T]$, soluția $\mathcal{U} = \{u_i, \varphi, \theta\}$, măsurată prin $\mathcal{I}(r, t)$ sau $\mathcal{J}(r, t)$, descrește spațial în următoarea formă

$$\mathcal{I}(r, t) \leq \mathcal{I}(0, t) \exp\left(-\frac{\sigma}{\zeta} r\right), \quad 0 \leq r \leq L, \quad (3.2.14)$$

$$\mathcal{J}(r, t) \leq \mathcal{J}(0, t) \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{t}\tilde{\zeta}(t)} r\right), \quad 0 \leq r \leq L, \quad (3.2.15)$$

unde ζ și $\tilde{\zeta}(t)$ sunt date de relațiile (3.2.9) și (3.2.12).

Teorema 3.2.3. (Comportare spațială pentru domenii nemărginite) Fie B un domeniu nemărginit. Dacă $\mathcal{U} = \{u_i, \varphi, \theta\}$ este o soluție a problemei la limită cu valori inițiale $(\mathcal{P})$ și dacă mulțimea suport $\widehat{D}_T$ este mărginită, atunci, pentru fiecare $t \in [0, T]$, fixat, comportarea spațială a soluției $\mathcal{U} = \{u_i, \varphi, \theta\}$ este descrisă de următoarea alternativă:

(i) Dacă $\mathcal{I}(r, t) \geq 0$ pentru orice $r \geq 0$, atunci avem

$$\mathcal{I}(r, t) \leq \mathcal{I}(0, t) \exp\left(-\frac{\sigma}{\zeta} r\right), \quad (3.2.16)$$

$$\mathcal{J}(r, t) \leq \mathcal{J}(0, t) \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{t}\tilde{\zeta}(t)} r\right), \quad (3.2.17)$$

pentru orice $r \geq 0$;

(ii) Dacă există $r_t \geq 0$ astfel încât $\mathcal{I}(r_t, t) < 0$, atunci obținem

$$-\mathcal{I}(r, t) \geq -\mathcal{I}(r_t, t) \exp\left[\frac{\sigma}{\zeta}(r - r_t)\right], \quad (3.2.18)$$

$$-\mathcal{J}(r, t) \geq -\mathcal{J}(r_t, t) \exp\left[\frac{1}{\sqrt{t}\tilde{\zeta}(t)}(r - r_t)\right], \quad (3.2.19)$$

pentru orice $r \geq r_t$.

Capitolul 4

Probleme nestandard în medii termovâscoelastice poroase

Acest capitol este dedicat studiului comportării spațiale a soluției unei probleme nestandard asociată teoriei liniare a mediilor termovâscoelastice poroase. Vom considera un cilindru prismatic alcătuit dintr-un material termovâscoelastic poros, supus încărcărilor masice nule, condițiilor nule pe frontiera laterală și unor condiții finale proporționale condițiilor inițiale. Dacă factorii de proporționalitate sunt în valoare absolută superiori unității, atunci, sub ipotezele de pozitivă definire a densității de energie internă și a energiei de disipare, vom studia comportarea spațială a soluției problemei nestandard folosind metoda integralelor ponderate în timp [9].

Rezultatele prezentate în acest capitol au fost publicate de autor în lucrarea [2].

4.1 Formularea problemei nestandard

Considerăm că regiunea B reprezintă un cilindru drept de înălțime L , alcătuit dintr-un material termovâscoelastic poros compresibil, anizotrop și neomogen. Alegem un sistem ortogonal de coordonate carteziene $OX_1X_2X_3$ astfel încât axa OX_3 să fie paralelă cu generatoarea cilindrului și una din bazele cilindrului să se găsească în planul X_1OX_2 . Vom nota cu $D(X_3)$ secțiunea transversală a cilindrului aflată la distanța X_3 față de planul X_1OX_2 , iar cu Π vom nota frontiera laterală a cilindrului.

Considerăm problema nestandard ($\mathcal{P}$) definită de sistemul de ecuații (1.4.4)-(1.4.6) cu încărcări masice și termice nule, la care se adaugă condițiile la limită laterale

$$\dot{u}_i(\mathbf{X}, t)t_{ji}(\mathbf{X}, t)n_j = 0, \quad \dot{\varphi}(\mathbf{X}, t)H_j(\mathbf{X}, t)n_j = 0, \quad \theta(\mathbf{X}, t)Q_j(\mathbf{X}, t)n_j = 0, \quad (4.1.1)$$

pentru $(\mathbf{X}, t) \in \Pi \times [0, T]$, condițiile la limită pe bază

$$u_i(\mathbf{X}, t) = f_i(X_1, X_2, t), \quad \varphi(\mathbf{X}, t) = g(X_1, X_2, t), \quad \theta(\mathbf{X}, t) = h(X_1, X_2, t), \quad (4.1.2)$$

pentru $(\mathbf{X}, t) \in D(0) \times [0, T]$ și condițiile finale la momentul T

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{X}, T) &= \lambda u_i(\mathbf{X}, 0), \quad \varphi(\mathbf{X}, T) = \lambda \varphi(\mathbf{X}, 0), \quad \theta(\mathbf{X}, T) = \mu \theta(\mathbf{X}, 0), \\ \dot{u}_i(\mathbf{X}, T) &= \alpha \dot{u}_i(\mathbf{X}, 0), \quad \dot{\varphi}(\mathbf{X}, T) = \beta \dot{\varphi}(\mathbf{X}, 0), \quad \text{pentru } \mathbf{X} \in B. \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

Aici n_i reprezintă componentele normalei exterioare la suprafața Π , intervalul $[0, T]$ este fixat, $T > 0$, iar f_i, g și h sunt funcții prescrise. Parametrii λ, μ, α și β sunt considerați prescriși și satisfac următoarele condiții

$$|\lambda| > 1, \quad |\mu| > 1, \quad |\alpha| > 1, \quad |\beta| > 1. \quad (4.1.4)$$

În cele ce urmează, presupunem că ρ_0, κ și a sunt funcții strict pozitive și că energia internă și energia de disipare sunt forme pătratice pozitiv definite.

4.2 Comportarea spațială a soluției

Pentru a studia comportarea spațială a soluției problemei nestandard $(\mathcal{P})$, asociată modelului termovâscoelastic poros, introducem următoarea funcțională [10]

$$\mathfrak{J}(X_3) = \int_0^T \int_{D(X_3, \tau)} e^{-\sigma\tau} \left(t_{3i} \dot{u}_i + H_3 \dot{\varphi} + \frac{1}{T_0} Q_3 \theta \right) da d\tau, \quad X_3 \in [0, L], \quad (4.2.1)$$

unde σ este un parametru pozitiv ce urmează a fi determinat explicit mai târziu.

Dacă derivăm în raport cu X_3 în relația (4.2.1), obținem

$$\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{J}}{dX_3}(X_3) = & \int_0^T \int_{D(X_3, \tau)} e^{-\sigma\tau} \left[\frac{\sigma}{2} \left(\rho_0 \dot{u}_i \dot{u}_i + \rho_0 \kappa \dot{\varphi}^2 + a \theta^2 + 2\mathcal{W}(\mathcal{U}) \right) + \Lambda(\mathcal{U}) \right] da d\tau \\ & + \frac{\alpha^2 e^{-\sigma T} - 1}{2} \int_{D(X_3, 0)} \rho_0 \dot{u}_i \dot{u}_i da + \frac{\beta^2 e^{-\sigma T} - 1}{2} \int_{D(X_3, 0)} \rho_0 \kappa \dot{\varphi}^2 da \\ & + \frac{\mu^2 e^{-\sigma T} - 1}{2} \int_{D(X_3, 0)} a \theta^2 da + \frac{\lambda^2 e^{-\sigma T} - 1}{2} \int_{D(X_3, 0)} 2\mathcal{W}(\mathcal{U}) da. \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

În baza condițiilor (4.1.4), vom presupune că σ satisface

$$0 < \sigma < \frac{2}{T_{\mathbf{x} \in \bar{B}}} \min \left[\ln|\lambda|, \ln|\mu|, \ln|\alpha|, \ln|\beta| \right]. \quad (4.2.3)$$

Putem concluziona că $\mathfrak{J}(X_3)$ este o funcțională crescătoare în raport cu X_3 pe $[0, L]$.

Pe de altă parte, obținem următoarea estimare pentru $\mathfrak{J}(X_3)$

$$\begin{aligned} |\mathfrak{J}(X_3)| \leq & \int_0^T \int_{D(X_3, \tau)} e^{-\sigma\tau} \left\{ \frac{1}{\varepsilon_3 \sigma} \frac{\sigma}{2} \left(\rho_0 \dot{u}_i \dot{u}_i + \rho_0 \kappa \dot{\varphi}^2 \right) + \left[\frac{2\varepsilon_3 M^2}{\rho_0 a_0 \sigma} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} \right) \right. \right. \\ & + \left. \frac{1}{\varepsilon_2 T_0 \sigma} \right] \frac{\sigma}{2} a \theta^2 + \frac{2\mu_M \varepsilon_3 (1 + \varepsilon)}{\rho_0 \sigma} \sigma \mathcal{W}(\mathcal{U}) + \frac{\varepsilon_4 \tilde{\alpha}_M}{2a_0 T_0} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon'} \right) \Lambda_3(\mathcal{U}) \\ & \left. + \frac{\varepsilon_4 K_M}{a_0} (1 + \varepsilon') \Lambda_2(\mathcal{U}) + \frac{\varepsilon_3 \alpha_M}{\rho_0} \Lambda_1(\mathcal{U}) \right\} da d\tau, \quad \forall \varepsilon, \varepsilon', \varepsilon_3, \varepsilon_4 > 0. \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Cum inegalitatea (4.2.4) are loc pentru orice $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon_3$ și ε_4 , vom considera

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{\vartheta}, \quad \varepsilon_4 = \frac{2a_0 T_0 \vartheta}{\sigma (2T_0 K_M + \tilde{\alpha}_M)}, \quad \varepsilon' = \frac{\tilde{\alpha}_M}{2T_0 K_M}, \quad \vartheta = \sqrt{\frac{2\mu_M (1 + \varepsilon)}{\rho_0}}, \quad (4.2.5)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left[-1 + \frac{M^2}{\mu_M a_0} + \frac{\rho_0 \sigma \tilde{\alpha}_M}{4\mu_M a_0 T_0^2} + \frac{\rho_0 \sigma K_M}{2\mu_M a_0 T_0} + \sqrt{\left(1 - \frac{M^2}{\mu_M a_0} - \frac{\rho_0 \sigma \tilde{\alpha}_M}{4\mu_M a_0 T_0^2} - \frac{\rho_0 \sigma K_M}{2\mu_M a_0 T_0} \right)^2 + \frac{4M^2}{\mu_M a_0}} \right]. \quad (4.2.6)$$

Cu aceste alegeri, vom obține următoarea inegalitate diferențială de ordinul întâi

$$\frac{\sigma}{\omega} |\mathfrak{J}(X_3)| \leq \frac{d\mathfrak{J}}{dX_3}(X_3), \quad \forall X_3 \in [0, L]. \quad (4.2.7)$$

Considerăm cazul în care $\mathfrak{J}(X_3) \leq 0$, $\forall X_3 \in [0, L]$. Cum $\mathfrak{J}(X_3)$ este o funcție crescătoare, vom obține următoarea estimare de tipul Saint-Venant

$$0 \leq -\mathfrak{J}(X_3) \leq -\mathfrak{J}(0)e^{-\frac{\sigma}{\omega}X_3}, \quad \forall X_3 \in [0, L]. \quad (4.2.8)$$

Mai mult, dacă introducem următoarea notație

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(X_3) = & \kappa_\sigma \int_{D(X_3, 0)} \left[\rho \dot{u}_i \dot{u}_i + \rho \kappa \dot{\varphi}^2 + a\theta^2 + 2\mathcal{W}(\mathcal{U}) \right] dv \\ & + \int_0^T \int_{D(X_3, \tau)} e^{-\sigma\tau} \left[\frac{\sigma}{2} \left(\rho \dot{u}_i \dot{u}_i + \rho \kappa \dot{\varphi}^2 + a\theta^2 + 2\mathcal{W}(\mathcal{U}) \right) + \Lambda(\mathcal{U}) \right] dv d\tau, \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

atunci vom obține

$$\mathcal{E}(X_3) \leq -\mathfrak{J}(0)e^{-\frac{\sigma}{\omega}X_3}, \quad \forall X_3 \in [0, \infty). \quad (4.2.10)$$

Dacă $\mathfrak{J}(X_3) > 0$, atunci există $X_3^* \in [0, L]$ astfel încât $\mathfrak{J}(X_3) \geq \mathfrak{J}(X_3^*) > 0$, $\forall X_3 \in [X_3^*, L]$. Astfel, vom obține următoarea estimare de creștere

$$\mathfrak{J}(X_3) \geq \mathfrak{J}(X_3^*)e^{\frac{\sigma}{\omega}(X_3 - X_3^*)}, \quad \forall X_3 \in [X_3^*, L]. \quad (4.2.11)$$

Pentru un cilindru semi-infinit relația de mai sus arată că funcționala $\mathfrak{J}(X_3)$ devine nemărginită pentru valori suficient de mari ale lui X_3 .

4.3 Comentarii

În această secțiune, vom considera o problemă nestandard similară $(\mathcal{P}')$ în care condiții finale (4.1.3) sunt înlocuite cu

$$\begin{aligned} u_r(\mathbf{X}, T) &= \lambda u_r(\mathbf{X}, 0), \quad \varphi(\mathbf{X}, T) = \gamma \varphi(\mathbf{X}, 0), \quad \theta(\mathbf{X}, T) = \mu \theta(\mathbf{X}, 0), \\ \dot{u}_r(\mathbf{X}, T) &= \alpha \dot{u}_r(\mathbf{X}, 0), \quad \dot{\varphi}(\mathbf{X}, T) = \beta \dot{\varphi}(\mathbf{X}, 0), \quad \text{pentru } \mathbf{X} \in B. \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

Vrem să vedem ce condiții trebuie să considerăm asupra coeficienților de proporționalitate $\lambda, \gamma, \mu, \alpha$ și β , astfel încât problema $(\mathcal{P}')$ să fie bine pusă și astfel încât

studiul comportării spațiale a soluției acestei probleme să se facă în mod similar cu cel prezentat în Secțiunea 4.2.

Dacă vom alege σ în mulțimea

$$0 < \sigma < \frac{1}{T_{\mathbf{x} \in B}} \left\{ \ln \alpha^2, \ln \beta^2, \ln \mu^2, \ln \frac{\lambda^2 \mu_m}{\mu_M}, \ln \frac{\gamma^2 \mu_m}{\mu_M} \right\}, \quad (4.3.2)$$

doar dacă au loc următoarele condiții

$$|\alpha| > 1, \quad |\beta| > 1, \quad |\mu| > 1, \quad |\lambda| > \sqrt{\frac{\mu_M}{\mu_m}} > 1, \quad |\gamma| > \sqrt{\frac{\mu_M}{\mu_m}} > 1. \quad (4.3.3)$$

Cu aceste alegeri, putem determina estimări de creștere și de descreștere spațială folosind același raționament ca cel utilizat în Secțiunea 4.2. Cu alte cuvinte, dacă în loc de condițiile nestandard (4.1.3) avem condițiile nestandard mai generale (4.3.1), atunci vom putea determina estimări asemănătoare cu cele obținute în Secțiunea 4.2, dacă parametrii $\lambda, \gamma, \mu, \alpha$ și β satisfac condițiile (4.3.3).

Capitolul 5

Problema comportării spațiale pentru probleme la limită cu valori finale

Problemele la limită cu valori finale reprezintă un caz particular de probleme nestandard, pentru care sunt considerate prescrise datele la momentul final $t = 0$. În acest capitol vom studia comportarea spațială a soluției problemei la limită cu valori finale asociată modelului termovâscoelastic poros. Printr-o schimbare de variabilă convenabilă $t \rightsquigarrow -t$, vom transforma problema la limită cu valori finale într-o problemă la limită cu valori inițiale. Vom studia comportarea spațială a soluției problemei transformate cu ajutorul unei funcționale asociată procesului termovâscoelastic poros. În termenii acestei funcționale vom determina estimări de descreștere spațială de tipul Saint-Venant.

Rezultatele prezentate în acest capitol au fost incluse în lucrarea [6].

5.1 Formularea problemei la limită cu valori finale

Vom considera că domeniul B , de frontieră ∂B , este alcătuit dintr-un material termovâscoelastic poros, anizotrop și neomogen. Vom nota cu $(\mathcal{P}_f)$ problema la limită cu valori finale asociată modelului termovâscoelastic poros definită de ecuațiile (1.4.4)-(1.4.6) în $B \times (-\infty, 0)$. Atașăm ecuațiilor de mai sus, următoarele condiții finale

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{X}, 0) &= u_i^0(\mathbf{X}), \quad \varphi(\mathbf{X}, 0) = \varphi^0(\mathbf{X}), \quad \theta(\mathbf{X}, 0) = \theta^0(\mathbf{X}), \\ \dot{u}_i(\mathbf{X}, 0) &= \dot{u}_i^0(\mathbf{X}), \quad \dot{\varphi}(\mathbf{X}, 0) = \dot{\varphi}^0(\mathbf{X}), \quad \text{pentru } \mathbf{X} \in \bar{B}, \end{aligned} \quad (5.1.1)$$

unde $u_i^0, \varphi^0, \theta^0, \dot{u}_i^0$ și $\dot{\varphi}^0$ sunt funcții prescrise, și următoarele condiții la frontieră

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{X}, t) &= \bar{u}_i(\mathbf{X}, t) \text{ pe } \bar{\Sigma}_1 \times (-\infty, 0], \quad t_{ji}(\mathbf{X}, t)n_j = \bar{t}_i(\mathbf{X}, t) \text{ pe } \Sigma_2 \times (-\infty, 0], \\ \varphi(\mathbf{X}, t) &= \bar{\varphi}(\mathbf{X}, t) \text{ pe } \bar{\Sigma}_3 \times (-\infty, 0], \quad H_j(\mathbf{X}, t)n_j = \bar{H}(\mathbf{X}, t) \text{ pe } \Sigma_4 \times (-\infty, 0], \\ \theta(\mathbf{X}, t) &= \bar{\theta}(\mathbf{X}, t) \text{ pe } \bar{\Sigma}_5 \times (-\infty, 0], \quad Q_j(\mathbf{X}, t)n_j = \bar{Q}(\mathbf{X}, t) \text{ pe } \Sigma_6 \times (-\infty, 0], \end{aligned}$$

unde $\bar{u}_i, \bar{\varphi}, \bar{\theta}, \bar{t}_i, \bar{H}$ și $\bar{Q}$ sunt funcții prescrise.

Urmând procedeul utilizat în [18], transformăm problema la limită cu valori finale într-o problemă cu valori inițiale, cu ajutorul schimbării de variabilă $t \rightsquigarrow -t$. Vom nota cu $(\mathcal{P}_i)$ problema la limită transformată, în care ecuațiile de mișcare, ecuația forțelor de echilibrare, ecuația energiei, ecuațiile geometrice și ecuațiile constitutive sunt definite pe intervalul de timp $(0, \infty)$.

În cele ce urmează, presupunem că ρ_0, κ și a sunt funcții strict pozitive pe $\overline{B}$, și că energia internă și energia de disipare sunt forme pătratice pozitiv definite.

5.2 Rezultate auxiliare

Lema 5.2.1. *Dacă $\mathcal{U} = \{u_i, \varphi, \theta\}$ este o soluție a problemei la limită $(\mathcal{P}_i)$, atunci pentru orice $\varepsilon, \varepsilon' > 0$, are loc inegalitatea*

$$\begin{aligned} t_{ij}t_{ij} + \frac{1}{\kappa_0}H_iH_i &\leq 4\mu_M(1 + \varepsilon)\mathcal{W}(\mathcal{U}) + 2\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)M^2\theta^2 \\ &\quad + 2N^2(1 + \varepsilon')\Lambda_2(\mathcal{U}) + 2\left(1 + \frac{1}{\varepsilon'}\right)\alpha_M\Lambda_3(\mathcal{U}). \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

Lema 5.2.2. *Dacă $\mathcal{U} = \{u_i, \varphi, \theta\}$ este o soluție a problemei la limită $(\mathcal{P}_i)$, atunci, pentru orice $\varepsilon'' > 0$, are loc inegalitatea*

$$Q_iQ_i \leq K_M(1 + \varepsilon'')\Lambda_2(\mathcal{U}) + \tilde{\alpha}_M\left(1 + \frac{1}{\varepsilon''}\right)\Lambda_3(\mathcal{U}). \quad (5.2.2)$$

5.3 Comportarea spațială a soluției

Fie $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}, \varphi, \theta\}$ o soluție a problemei la limită transformate $(\mathcal{P}_i)$ și fie $T > 0$ fixat. La fel ca în Secțiunea 3.2, vom nota cu $\widehat{D}_T$, suportul încărcărilor $\mathcal{L} = \{f_i, \ell, S, u_i^0, v_i^0, \varphi^0, \psi^0, \theta^0, \bar{u}_i, \bar{\varphi}, \bar{\theta}, \bar{t}_i, \bar{H}, \bar{Q}\}$ pe intervalul de timp $[0, T]$. Presupunem că mulțimea $\widehat{D}_T$ este mărginită.

Pentru a studia comportarea spațială a soluției problemei la limită $(\mathcal{P}_i)$, definim

$$I(r, t) = \int_0^t \int_{B_r} e^{\sigma s} \left\{ \frac{\sigma}{2} \left[\rho_0 \dot{u}_i(s) \dot{u}_i(s) + \rho_0 \kappa \dot{\varphi}^2(s) + 2\mathcal{W}(s) + a\theta(s)^2 \right] + \Lambda'(s) \right\} dv ds,$$

pentru orice $t \in [0, T]$ și orice $r \in [0, L]$, unde σ este un parametru prescris pozitiv, iar Λ' este definit de

$$\begin{aligned} \Lambda' &= C_{ijrs}^* \dot{e}_{ij} \dot{e}_{rs} + \xi^* \dot{\varphi}^2 + A_{ij}^* \dot{\varphi}_{,i} \dot{\varphi}_{,j} + \frac{1}{T_0} k_{ij} \theta_{,i} \theta_{,j} + (B_{ij}^* + F_{ij}^*) \dot{e}_{ij} \dot{\varphi} + (D_{ijk}^* + G_{ijk}^*) \dot{e}_{ij} \dot{\varphi}_{,k} \\ &\quad + (d_i^* + \gamma_i^*) \dot{\varphi} \dot{\varphi}_{,i} - (M_{ijk}^* + \frac{1}{T_0} f_{kij}) \dot{e}_{ij} \theta_{,k} - (R_j^* + \frac{1}{T_0} b_j) \dot{\varphi} \theta_{,j} - (P_{ij}^* + \frac{1}{T_0} a_{ji}) \dot{\varphi}_{,i} \theta_{,j}. \end{aligned}$$

Următoarea leamnă prezintă unele proprietăți ale funcționalei $I(r, t)$.

Lema 5.3.1. Fie $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}, \varphi, \theta\}$ soluția problemei la limită transformate $(\mathcal{P}_i)$ și fie $\widehat{D}_T$ un domeniu mărginit. Atunci, pentru orice $t \in [0, T]$, funcționala $I(r, t)$ satisface următoarele proprietăți:

(i) Pentru $0 \leq r_2 < r_1$, avem

$$I(r_1, t) - I(r_2, t) = - \int_0^t \int_{B(r_1, r_2)} \frac{\sigma}{2} e^{\sigma s} \left[\rho_0 \dot{u}_i(s) \dot{u}_i(s) + \rho_0 \kappa \dot{\varphi}^2(s) + a\theta(s)^2 + 2\mathcal{W}(s) \right] dv ds - \int_0^t \int_{B(r_1, r_2)} e^{\sigma s} \Lambda'(s) dv ds;$$

(ii) $I(r, t)$ este descrescătoare în raport cu raza $r \in [0, L]$;

(iii) $I(r, t)$ este continuu diferențiabilă în raport cu $r \in [0, L]$ și satisface

$$\frac{\partial I}{\partial r}(r, t) = - \int_0^t \int_{S_r} e^{\sigma s} \left\{ \frac{\sigma}{2} \left[\rho_0 \dot{u}_i(s) \dot{u}_i(s) + \rho_0 \kappa \dot{\varphi}^2(s) + a\theta(s)^2 + 2\mathcal{W}(s) \right] + \Lambda'(s) \right\} dad s$$

$$\frac{\partial I}{\partial t}(r, t) = \int_{B_r} e^{\sigma t} \left\{ \frac{\sigma}{2} \left[\rho_0 \dot{u}_i(t) \dot{u}_i(t) + \rho_0 \kappa \dot{\varphi}^2(t) + a\theta(t)^2 + 2\mathcal{W}(t) \right] + \Lambda'(t) \right\} dv.$$

Lema 5.3.2. Fie $\mathcal{U}$ o soluție a problemei la limită $(\mathcal{P}_i)$ corespunzătoare încărcărilor $\mathcal{L} = \{f_i, \ell, S, u_i^0, v_i^0, \varphi^0, \psi^0, \theta^0, \bar{u}_i, \bar{\varphi}, \bar{\theta}, \bar{\ell}_i, \bar{H}, \bar{Q}\}$. Atunci, pentru orice $r \in [0, L], t \in [0, T]$, funcționala $I(r, t)$ satisface următoarea inegalitate diferențială de ordinul întâi

$$I(r, t) \leq \frac{1}{\sigma} \frac{\partial I}{\partial t}(r, t) - \frac{\zeta(\sigma)}{\sigma} \frac{\partial I}{\partial r}(r, t), \quad (5.3.1)$$

unde $\zeta(\sigma) = \sqrt{\frac{2\mu_M(1+\varepsilon_0)}{\rho_0}}$, iar ε_0 este rădăcina pozitivă a următoarei ecuații algebrice

$$\varepsilon^2 + \left[1 - \frac{M^2}{\mu_M a_0} - \frac{\rho_0 \sigma (\tilde{\alpha}_M + K_M)}{4\mu_M a_0 T_0^2} \right] \varepsilon - \frac{M^2}{\mu_M a_0} = 0. \quad (5.3.2)$$

Teorema 5.3.1. (Comportarea spațială a soluției) Fie $\mathcal{U}$ o soluție a problemei la limită $(\mathcal{P}_i)$, corespunzătoare încărcărilor $\mathcal{L} = \{f_i, \ell, S, u_i^0, v_i^0, \varphi^0, \psi^0, \theta^0, \bar{u}_i, \bar{\varphi}, \bar{\theta}, \bar{\ell}_i, \bar{H}, \bar{Q}\}$. Atunci, pentru σ (suficient de mare) și pentru orice $r_0 \in [0, L], t_0 \in [0, T]$ ce satisfac

$$L \leq \zeta(\sigma)t_0 + r_0 \leq \zeta(\sigma)T, \quad (5.3.3)$$

are loc următoarea inegalitate

$$I\left(r, t_0 + \frac{r_0 - r}{\zeta(\sigma)}\right) \leq \exp\left(-\frac{\sigma}{\zeta(\sigma)}r\right) I\left(0, t_0 + \frac{r_0}{\zeta(\sigma)}\right), \forall r \in [0, L]. \quad (5.3.4)$$

Capitolul 6

Propagarea undelor în medii termoelastice poroase

Acest capitol este consacrat studiului propagării undelor armonice plane și a undelor de suprafață Rayleigh în medii termoelastice poroase. Pentru început, vom prezenta ecuațiile de bază ale teoriei liniare a mediilor termoelastice poroase [15]. Vom considera apoi un semi-spațiu alcătuit dintr-un material termoelastic poros izotrop și omogen și vom analiza efectele de amortizare în timp a undelor plane. Vom studia apoi problema propagării undelor de suprafață Rayleigh pentru cazul mediilor termoelastice poroase. Vom determina ecuația seculară atât în formă explicită cât și în formă implicită. În final, vom prezenta unele rezultate numerice pentru a evidenția rezultatele teoretice obținute. Rezultatele prezentate în acest capitol au fost incluse în lucrarea [7].

6.1 Ecuațiile teoriei liniare a mediilor termoelastice poroase

Considerăm că regiunea B este alcătuită dintr-un material termoelastic poros, izotrop și omogen. Ecuațiile de bază ale teoriei liniare a mediilor termoelastice poroase sunt

$$\begin{aligned} t_{ji,j} + \rho_0 f_i &= \rho_0 \ddot{u}_i, \\ H_{i,i} + g + \rho_0 \ell &= \rho_0 \kappa \ddot{\varphi}, \\ \rho_0 T_0 \dot{\eta} &= Q_{i,i} + \rho_0 S, \end{aligned} \quad \text{în } B \times (0, \infty)$$
(6.1.1)

Ecuațiile constitutive pentru cazul materialelor izotrope devin

$$\begin{aligned} t_{ij} &= \lambda e_{rr} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} + b\varphi \delta_{ij} - \beta \theta_{ij}, \\ H_i &= \alpha \varphi_{,i}, \\ g &= -b e_{rr} - \xi \varphi + m\theta, \\ \rho \eta &= \beta e_{rr} + a\theta + m\varphi, \\ Q_i &= k \theta_{,i}, \end{aligned}$$
(6.1.2)

unde $\lambda, \mu, \dots, k$ sunt coeficienți constitutivi.

În cele ce urmează, presupunem că ρ_0 și κ sunt funcții continue și strict pozitive. Presupunem că $\lambda, \mu, \beta, b, \alpha, k \in C^1(\overline{B})$, $a, \xi, m \in C(\overline{B})$ și că au loc

$$\mu > 0, \quad \alpha > 0, \quad k > 0, \quad \xi > 0, \quad \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)\xi > b^2. \quad (6.1.3)$$

6.2 Unde armonice plane

În cele ce urmează, presupunem că încărcările masice și termice sunt nule. Așadar, vom considera următorul sistem de ecuații cu derivate parțiale pentru u_i, φ și θ

$$\begin{aligned} \mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu)u_{j,ji} + b\varphi_{,i} - \beta\theta_{,i} &= \rho_0 \ddot{u}_i, \\ \alpha\varphi_{,ii} - bu_{i,i} - \xi\varphi + m\theta &= \rho_0 \kappa \ddot{\varphi}, \\ k\theta_{,ii} &= c\ddot{\theta} + \beta T_0 \dot{u}_{r,r} + mT_0 \dot{\varphi}, \quad \text{în } B \times (0, \infty). \end{aligned} \quad (6.2.1)$$

Ținând cont de proprietățile disipative ale materialului termoelastic poros, vom căuta soluții ale sistemului diferențial (6.2.1), în forma (cf. [8, 11])

$$\begin{aligned} u_r(\mathbf{X}, t) &= \operatorname{Re}\{A_r e^{i\kappa(\mathbf{n} \cdot \mathbf{X} - vt)}\}, \\ \varphi(\mathbf{X}, t) &= \operatorname{Re}\{B e^{i\kappa(\mathbf{n} \cdot \mathbf{X} - vt)}\}, \\ \theta(\mathbf{X}, t) &= \operatorname{Re}\{C e^{i\kappa(\mathbf{n} \cdot \mathbf{X} - vt)}\}, \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

unde κ reprezintă numărul de undă, $\mathbf{n}$ este un versor constant, $\mathbf{A}$ este un vector constant complex, iar B și C sunt constante complexe. Presupunem că v este o constantă complexă astfel încât $\operatorname{Re}(v) > 0, \operatorname{Im}(v) \leq 0$. Cantitatea $\operatorname{Re}(v)$ descrie viteza undei, iar $\exp[\kappa \operatorname{Im}(v)t]$ descrie amortizarea în timp a undei.

În baza relațiilor (6.2.1) și (6.2.2), vom obține următoarea ecuație caracteristică

$$(c_2^2 - v^2)^2 \Delta(v) = 0, \quad (6.2.3)$$

unde

$$\begin{aligned} \Delta(v) = & v^5 + \frac{ik\kappa}{c}v^4 - \left[c_1^2 + \frac{1}{\rho_0\kappa\kappa^2}\left(\xi + \alpha\kappa^2 + \frac{m^2T_0}{c}\right) + \frac{\beta^2T_0}{\rho_0c}\right]v^3 - \frac{ik\kappa c_1^2}{c}v^3 \\ & - \left[\frac{ik\kappa}{\rho_0c\kappa\kappa^2}\left(\xi + \alpha\kappa^2\right)\right]v^2 + \frac{1}{\rho_0\kappa\kappa^2}\left[\frac{m^2T_0c_1^2}{c} + \left(\xi + \alpha\kappa^2\right)\left(c_1^2 + \frac{T_0\beta^2}{\rho_0c}\right)\right. \\ & \left. - \frac{b^2}{\rho_0} - \frac{2mT_0\beta b}{\rho_0c}\right]v - \frac{ikb^2}{\rho_0^2\kappa c\kappa} + \frac{ikc_1^2}{\rho_0\kappa c\kappa}\left(\xi + \alpha\kappa^2\right), \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}. \quad (6.2.5)$$

Dacă $v = v_1 = v_2 = c_2$, vom obține unde transversale în forma

$$u_r^{(T)} = \text{Re} \{ A_r e^{i\kappa n_s X_s} e^{-i\kappa c_2 t} \}, \quad \theta^{(T)} = 0, \quad \varphi^{(T)} = 0, \quad (6.2.6)$$

cu $\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = 0$. Putem remarca faptul că undele transversale sunt neamortizate în timp și nu sunt influențate de efectele termice și poroase. Mai mult, dacă alegem axa OX_1 să coincidă cu direcția de propagare, atunci vom putea asocia componentele deplasării u_2 și u_3 cu undele de forfecare.

Pentru $v \neq c_2$, vom obține că soluțiile sistemului (6.2.1) satisfac

$$(c_2^2 - v^2)A_r = \left[-(c_1^2 - c_2^2)n_s A_s + \frac{ib}{\rho_0 \kappa} B - \frac{i\beta}{\rho_0 \kappa} C \right] n_r. \quad (6.2.7)$$

Putem observa că undele corespunzătoare soluțiilor (6.2.1) sunt de tip longitudinal, nu sunt separabile și sunt influențate de efectele termice și poroase.

6.2.1 Simulări numerice

Pentru cazul unui material termoelastic poros, asemănător cristalelor de magneziu, am rezolvat ecuația seculară (6.2.3), cu ajutorul programului Wolfram Mathematica, obținând următoarele viteze de propagare a undelor

$$\begin{aligned} v_1 &= 6.96086 \times 10^{10} \text{ m s}^{-1}, \quad v_2 = (6176.291 - 1.0585 \times 10^{-8}i) \text{ m s}^{-1}, \\ v_3 &= -9.3589 \times 10^{-5}i \text{ m s}^{-1}. \end{aligned} \quad (6.2.8)$$

Mai mult, pentru a obține o idee asupra comportării vitezei corespunzătoare undelor plane, am reprezentat grafic, dependența vitezei în funcție de parametrul de cuplare b (vezi Figurile 6.2.1-6.2.5).

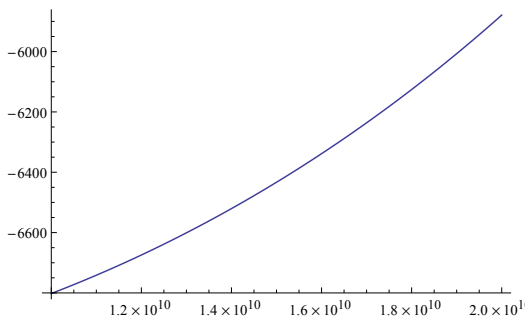


Figura 6.2.1: Graficul funcției $\text{Re}(v_1)$ pentru $b \in [10^{10}, 2 \times 10^{10}]$.

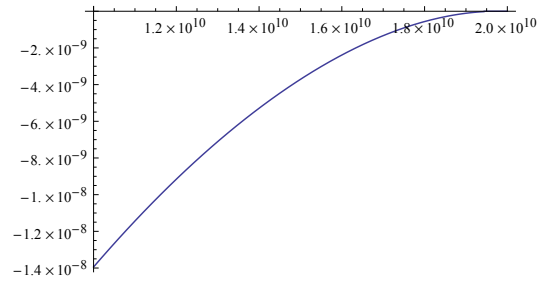


Figura 6.2.2: Graficul funcției $\text{Im}(v_1)$ pentru $b \in [10^{10}, 2 \times 10^{10}]$.

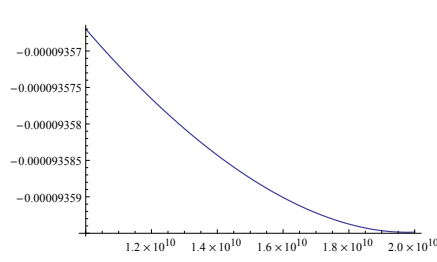


Figura 6.2.3: Graficul funcției $\text{Im}(v_2)$ pentru $b \in [10^{10}, 2 \times 10^{10}]$.

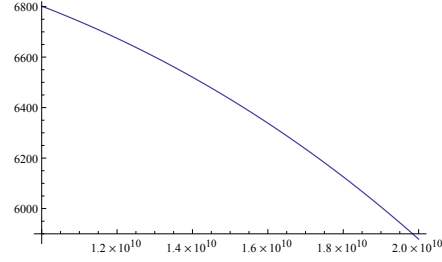


Figura 6.2.4: Graficul funcției $\text{Re}(v_3)$ pentru $b \in [10^{10}, 2 \times 10^{10}]$.

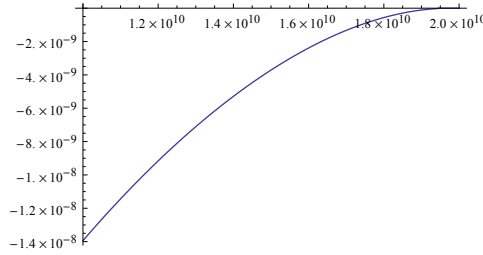


Figura 6.2.5: Graficul funcției $\text{Im}(v_3)$ pentru $b \in [10^{10}, 2 \times 10^{10}]$.

6.3 Propagarea undelor de suprafață Rayleigh

În această secțiune, vom considera propagarea unei unde plane în direcția axei OX_1 având atenuarea în direcția axei OX_2 , în semi-spațiul $X_2 \geq 0$, alcătuit dintr-un material termoelastic poros, izotrop și omogen. Presupunem că semi-spațiul este liber de încărcări și că pe suprafața $X_2 = 0$, avem următoarele condiții

$$t_{2r}(X_1, 0, X_3, t) = 0, \quad H_2(X_1, 0, X_3, t) = 0, \quad Q_2(X_1, 0, X_3, t) + h\theta(X_1, 0, X_3, t) = 0, \quad (6.3.1)$$

pentru orice $X_1, X_3 \in \mathbb{R}$ și $t \geq 0$, unde h este o constantă pozitivă prescrisă.

Problema propagării undelor de suprafață Rayleigh pentru un mediu termoelastic poros, izotrop și omogen, este alcătuită din ecuațiile de bază (6.1.1), condițiile la limită (6.3.1) și următoarele condiții asimptotice

$$\begin{aligned} \lim_{X_2 \rightarrow \infty} u_r(\mathbf{X}, t) &= 0, \quad \lim_{X_2 \rightarrow \infty} \varphi(\mathbf{X}, t) = 0, \quad \lim_{X_2 \rightarrow \infty} \theta(\mathbf{X}, t) = 0, \\ \lim_{X_2 \rightarrow \infty} t_{rs}(\mathbf{X}, t) &= 0, \quad \lim_{X_2 \rightarrow \infty} H_r(\mathbf{X}, t) = 0, \quad \lim_{X_2 \rightarrow \infty} Q_r(\mathbf{X}, t) = 0, \end{aligned} \quad (6.3.2)$$

pentru orice $X_1, X_3 \in \mathbb{R}$ și $t \geq 0$.

Pentru a rezolva problema propagării undelor Rayleigh, vom căuta soluții ale sistemului diferențial (6.2.1), în următoarea formă [13]

$$\begin{aligned} u_\alpha(\mathbf{X}, t) &= U_\alpha e^{i\kappa(X_1 - vt + rX_2)}, \quad u_3(\mathbf{X}, t) = 0, \\ \varphi(\mathbf{X}, t) &= P e^{i\kappa(X_1 - vt + rX_2)}, \\ \theta(\mathbf{X}, t) &= T e^{i\kappa(X_1 - vt + rX_2)}, \end{aligned} \quad (6.3.3)$$

unde U_α, P și T sunt parametri complecși constanți, nu toți nuli, κ este numărul de undă, v este un parametru complex astfel încât $\text{Re}(v) > 0, \text{Im}(v) \leq 0$, iar r este un număr complex ce satisface $\text{Im}(r) > 0$.

În baza relațiilor (6.1.1), (6.1.2) și (6.3.3) obținem ecuația caracteristică

$$(c_2^2 - v^2 + c_2^2 r^2)(r^6 + Lr^4 + Mr^2 + N) = 0, \quad (6.3.4)$$

unde

$$\begin{aligned} L &= 2 - \frac{v^2}{c_1^2} - \frac{icv}{k\kappa}(1 + \varepsilon) + \frac{1}{\alpha} \left(\alpha + \frac{\xi}{\kappa^2} - \rho_0 \kappa v^2 \right) - \frac{b^2}{\rho_0 c_1^2 \alpha \kappa^2}, \\ M &= -\frac{b^2}{\rho_0 c_1^2 \alpha \kappa^2} \left(2 - \frac{icv}{k\kappa} \right) + \left(1 - \frac{v^2}{c_1^2} \right) \left(1 - \frac{icv}{k\kappa} \right) - \frac{im^2 T_0 v}{k\alpha \kappa^3} - \varepsilon \frac{icv}{k\kappa} \\ &\quad + \frac{1}{\alpha} \left(\alpha + \frac{\xi}{\kappa^2} - \rho_0 \kappa v^2 \right) \left[2 - \frac{icv}{k\kappa} (1 + \varepsilon) - \frac{v^2}{c_1^2} \right] + 2 \frac{iT_0 m \beta b v}{\rho_0 c_1^2 \alpha k \kappa^3}, \\ N &= \frac{1}{\alpha} \left[1 - \frac{v^2}{c_1^2} + \frac{icv^3}{k\kappa c_1^2} - \frac{icv}{k\kappa} (1 + \varepsilon) \right] \left(\alpha + \frac{\xi}{\kappa^2} - \rho_0 \kappa v^2 \right) \\ &\quad + 2 \frac{imb\beta T_0 v}{\rho_0 c_1^2 k \alpha \kappa^3} - \frac{b^2}{\rho_0 c_1^2 \alpha \kappa^2} \left(1 - \frac{icv}{k\kappa} \right) - \frac{im^2 T_0 v}{\alpha k \kappa^3} \left(1 - \frac{v^2}{c_1^2} \right). \end{aligned} \quad (6.3.5)$$

Vom nota cu $r_i, i = 1, 2, 3, 4$ soluțiile ecuației (6.3.5), cu $\text{Im}(r_i) > 0$. Corespunzător lui r_i , sunt determinate soluțiile $U^{(i)} = (U_1^{(i)}, U_2^{(i)}, P^{(i)}, T^{(i)})$. Căutăm soluția problemei propagării undelor de suprafață, ca o combinație liniară soluții proprii. Înlocuind soluția în sistemul (6.1.1) vom găsi o ecuație seculară de gradul 9 în termenii lui $\omega = \frac{v}{ic_2}$. Din cele nouă soluții ale ecuației, le vom selecționa doar pe cele care satisfac condițiile $\text{Re}(\omega) \leq 0, \text{Im}(\omega) < 0$.

6.3.1 Simulări numerice

Considerăm că semi-spațiul $X_2 \geq 0$ este alcătuit dintr-un material termoelastic poros, asemănător cristalelor de magneziu. Pentru a evidenția soluția ecuației seculare, vom reprezenta grafic $\mathcal{F}(\text{Re}(\omega), \text{Im}(\omega)) = |10^{-70} \Omega(\omega) \Delta(\omega)|$ pentru $\text{Re}(\omega) \in (-0.1, 0.0)$ și $\text{Im}(\omega) \in (-1.0, -0.6)$. Se poate observa că există un punct $\omega \approx -0.900682i$ astfel încât $\mathcal{F}(\text{Re}(\omega), \text{Im}(\omega)) = 0$ (vezi Figurile 6.3.1-6.3.3).

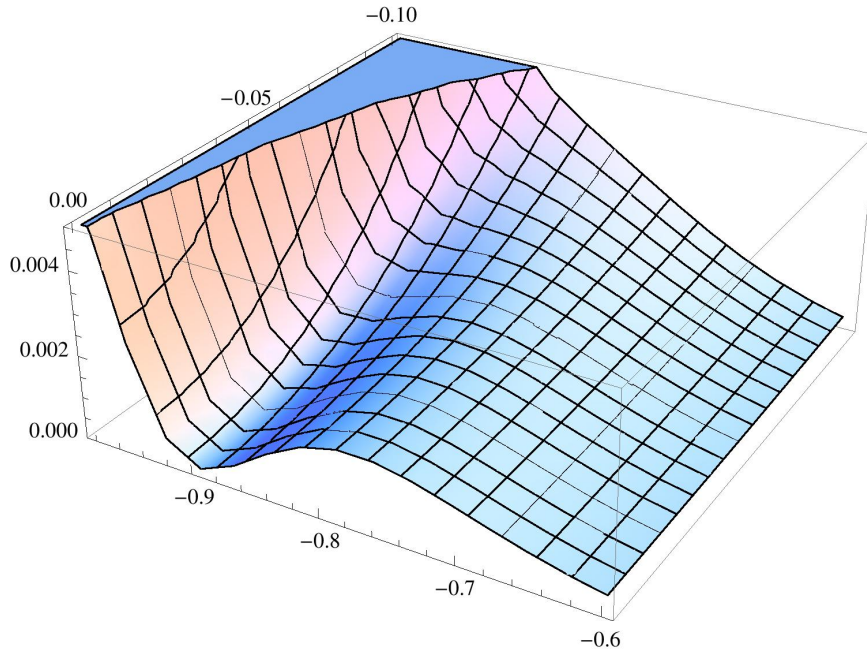


Figura 6.3.1: Graficul funcției $\mathcal{F}(\text{Re}(\omega), \text{Im}(\omega))$ pentru $\text{Re}(\omega) \in (-0.1, 0.0)$ și $\text{Im}(\omega) \in (-1.0, -0.6)$.

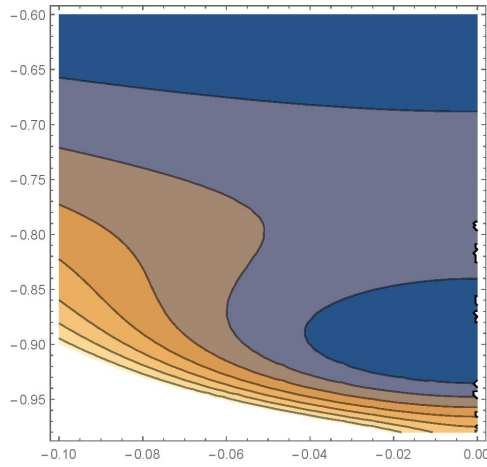


Figura 6.3.2: Curbele de nivel pentru funcția $\mathcal{F}(\text{Re}(\omega), \text{Im}(\omega))$ pentru $\text{Re}(\omega) \in (-0.1, 0.0)$ și $\text{Im}(\omega) \in (-1.0, -0.6)$.

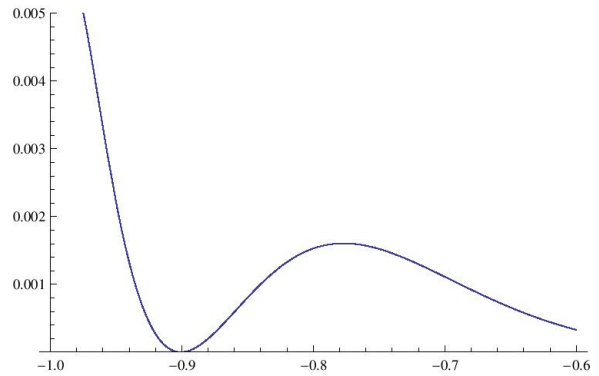


Figura 6.3.3: Graficul funcției $\mathcal{F}(\text{Re}(\omega), \text{Im}(\omega))$, pentru $\text{Re}(\omega) = 0$ și $\text{Im}(\omega) \in (-1.0, -0.6)$.

Așadar, putem concluziona că unda de suprafață Rayleigh se propagă cu o amplitudine și o viteză mai mică față de cazul izoterm. Acest lucru poate fi explicat prin faptul că efectul termoelastic disipativ nu este suficient de puternic.

Capitolul 7

Propagarea undelor în medii termovâscoelastice poroase

În acest capitol vom studia propagarea undelor de suprafață Rayleigh într-un semi-spațiu alcătuit dintr-un material termovâscoelastic poros gradat exponențial. Luând în considerare efectul disipativ al modelului, vom considera cazul undelor amortizate în timp. Vom stabili condiția de propagare în forma unei ecuații algebrice de gradul 10, cu coeficienți complecși. Vom studia problema propagării undelor de suprafață pentru cazul mediilor termovâscoelastice poroase anizotrope neomogene, anizotrope și omogene, izotrope și neomogene, cât și pentru cazul mediilor izotrope și omogene. Pentru cazul mediilor izotrope și omogene, vom determina ecuația seculară atât în formă implicită cât și în formă explicită. Mai mult, sunt prezentate unele simulări numerice pentru a evidenția mai bine rezultatele teoretice obținute. Conținutul acestui capitol se bazează în totalitate pe rezultatele stabilite de autor în lucrarea [4].

7.1 Propagarea undelor Rayleigh în medii termovâscoelastice poroase anizotrope și neomogene

În această secțiune, vom considera că regiunea B este semi-spațiul $X_2 \geq 0$, alcătuit dintr-un material termovâscoelastic poros, anizotrop și neomogen, gradat exponențial. Prin urmare, presupunem că densitatea de masă și coeficienții constitutivi au forma [8]

$$\begin{aligned} C_{ijkl} &= C_{ijkl}^0 e^{-\tau X_2}, B_{ij} = B_{ij}^0 e^{-\tau X_2}, D_{ijk} = D_{ijk}^0 e^{-\tau X_2}, \beta_{ij} = \beta_{ij}^0 e^{-\tau X_2}, A_{ij} = A_{ij}^0 e^{-\tau X_2}, \\ d_i &= d_i^0 e^{-\tau X_2}, a_i = a_i^0 e^{-\tau X_2}, \xi = \xi^0 e^{-\tau X_2}, a = a^0 e^{-\tau X_2}, m = m^0 e^{-\tau X_2}, k_{ij} = k_{ij}^0 e^{-\tau X_2}, \\ f_{ijk} &= f_{ijk}^0 e^{-\tau X_2}, b_i = b_i^0 e^{-\tau X_2}, a_{ij} = a_{ij}^0 e^{-\tau X_2}, C_{ijkl}^* = C_{ijkl}^{*0} e^{-\tau X_2}, D_{ijk} = D_{ijk}^{*0} e^{-\tau X_2}, \\ B_{ij}^* &= B_{ij}^{*0} e^{-\tau X_2}, M_{ijk} = M_{ijk}^{*0} e^{-\tau X_2}, A_{ij}^* = A_{ij}^{*0} e^{-\tau X_2}, G_{ijk}^* = G_{ijk}^{*0} e^{-\tau X_2}, P_{ij}^* = P_{ij}^{*0} e^{-\tau X_2}, \\ d_i^* &= d_i^{*0} e^{-\tau X_2}, F_{ij}^* = F_{ij}^{*0} e^{-\tau X_2}, \xi^* = \xi^{*0} e^{-\tau X_2}, R_i^* = R_i^{*0} e^{-\tau X_2}, \gamma_i^* = \gamma_i^{*0} e^{-\tau X_2}, \end{aligned}$$

iar $\rho_0 = \varrho_0 e^{-\tau X_2}$, unde $\tau, C_{ijkl}^0, \dots, \gamma_i^{*0}$ și ϱ_0 sunt constante reale.

Considerăm o undă de suprafață ce se propagă în direcția axei OX_1 , cu atenuarea în direcția OX_2 . Presupunem că semi-spațiul este liber de încărcări, că schimbă liber căldura cu regiunea $X_2 < 0$ și că pe suprafața $X_2 = 0$, au loc

$$t_{2i}(X_1, 0, X_3, t) = 0, \quad H_2(X_1, 0, X_3, t) = 0, \quad Q_2(X_1, 0, X_3, t) = 0, \quad (7.1.1)$$

pentru toți $X_1, X_3 \in \mathbb{R}, t \geq 0$. Mai mult, vom considera și următoarele condiții

$$\begin{aligned} \lim_{X_2 \rightarrow \infty} u_i(\mathbf{X}, t) = 0, \quad \lim_{X_2 \rightarrow \infty} \varphi(\mathbf{X}, t) = 0, \quad \lim_{X_2 \rightarrow \infty} \theta(\mathbf{X}, t) = 0, \\ \lim_{X_2 \rightarrow \infty} \{t_{ij}, h_i, g, Q_i\}(\mathbf{X}, t) = 0, \quad \forall X_1, X_3 \in \mathbb{R}, t \geq 0. \end{aligned} \quad (7.1.2)$$

Problema propagării undelor de suprafață Rayleigh constă în găsirea soluției ecuațiilor de bază (1.4.4)-(1.4.6), supuse condițiilor la limită (7.1.1) și condițiilor asimptotice (7.1.2). Vom căuta soluția $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, u_3, \varphi, \theta\}$ a ecuațiilor (1.4.4)-(1.4.6) în forma $\mathcal{U}(\mathbf{X}, t) = \mathcal{V}e^{i\chi(X_1 - vt + pX_2)}$, unde $\mathcal{V} = \{U_1, U_2, U_3, \Phi, \Theta\}$ este un vector constant, χ reprezintă numărul de undă, p este un parametru complex cu $\text{Im}(p) > 0$, iar v este un parametru complex ce satisface $\text{Re}(v) > 0, \text{Im}(v) \leq 0$.

În baza relațiilor (1.4.4)-(1.4.8), vom obține următoarea ecuație caracteristică

$$\begin{vmatrix} \mathcal{H}_{11} & \mathcal{H}_{12} & \mathcal{H}_{13} & \mathcal{G}_1 & \mathcal{T}_1 \\ \mathcal{H}_{21} & \mathcal{H}_{22} & \mathcal{H}_{23} & \mathcal{G}_2 & \mathcal{T}_2 \\ \mathcal{H}_{31} & \mathcal{H}_{32} & \mathcal{H}_{33} & \mathcal{G}_3 & \mathcal{T}_3 \\ \mathcal{I}_1 & \mathcal{I}_2 & \mathcal{I}_3 & \mathcal{K} & \mathcal{L} \\ \mathcal{J}_1 & \mathcal{J}_2 & \mathcal{J}_3 & \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{vmatrix} = 0, \quad (7.1.3)$$

unde $\mathcal{H}_{rs}, \mathcal{G}_j, \mathcal{T}_j, \mathcal{I}_i, \mathcal{J}_i, \mathcal{K}, \mathcal{L}, \mathcal{M}$ și $\mathcal{N}$ sunt date de relațiile (7.1.19)-(7.1.22).

Vom nota cu $p_n, n = 1, 2, \dots, 5$, soluțiile ecuației (7.1.3), cu $\text{Im}(p_n) > 0$, iar cu $\mathcal{V}^{(n)} = \{U_1^{(n)}, U_2^{(n)}, U_3^{(n)}, \Phi^{(n)}, \Theta^{(n)}\}$ soluțiile proprii corespunzătoare valorilor proprii $p_n, n = 1, 2, \dots, 5$. Căutăm soluția problemei propagării undelor de suprafață în următoarea formă $\mathcal{U}(X_1, X_2, t) = \sum_{n=1}^5 \vartheta_n \mathcal{V}^{(n)} e^{i\chi(X_1 - vt + p_n X_2)}$, unde $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4, \vartheta_5)$ este un vector constant nenul, ce urmează a fi determinat din condițiile la limită (7.1.1). Înlocuind soluția $\mathcal{U}$ în relația (7.1.1) vom obține ecuația seculară în termenii parametrului complex v . Nu este deloc ușor să găsim o soluție a problemei propagării undelor de suprafață Rayleigh. Totuși, pentru unele materiale particulare, ecuația seculară poate fi rezolvată utilizând metode numerice.

7.2 Propagarea undelor Rayleigh în medii termovâscoelastice poroase izotrope și neomogene

În această secțiune, se studiază propagarea undelor de suprafață Rayleigh pentru cazul unui semi-spațiu alcătuit dintr-un material termovâscoelastic poros, izotrop și

neomogen. Prin urmare, la fel ca în Secțiunea 7.1, vom presupune că

$$\begin{aligned}\lambda &= \lambda_0 e^{-\tau X_2}, \mu = \mu_0 e^{-\tau X_2}, b = b_0 e^{-\tau X_2}, \alpha = \alpha_0 e^{-\tau X_2}, \xi = \xi_0 e^{-\tau X_2}, \lambda^* = \lambda_0^* e^{-\tau X_2}, \\ \mu^* &= \mu_0^* e^{-\tau X_2}, b^* = b_0^* e^{-\tau X_2}, \gamma^* = \gamma_0^* e^{-\tau X_2}, \xi^* = \xi_0^* e^{-\tau X_2}, \beta = \beta_0 e^{-\tau X_2}, m = m_0 e^{-\tau X_2}, \\ \alpha^* &= \alpha_0^* e^{-\tau X_2}, a = a_0 e^{-\tau X_2}, \zeta = \zeta_0 e^{-\tau X_2}, k = k_0 e^{-\tau X_2}, \rho_0 = \rho_0 e^{-\tau X_2}.\end{aligned}$$

Procedând la fel ca în Secțiunea 7.1, vom obține următoarea ecuație caracteristică

$$\left[\tilde{\mu} p \left(p + \frac{i\tau}{\chi} \right) + \tilde{\mu} - \rho_0 v^2 \right] \Gamma = 0, \quad (7.2.1)$$

unde Γ este o funcție complicată ce are ca variabile p, v și τ .

7.3 Propagarea undelor Rayleigh în medii termovâscoelastice poroase izotrope și omogene

În această secțiune vom considera că semi-spațiul $X_2 \geq 0$ este alcătuit dintr-un material termovâscoelastic poros, izotrop și omogen (vom considera $\tau = 0$).

În acest caz, vom putea scrie ecuația caracteristică (7.2.1) în forma

$$[\tilde{\mu}(p^2 + 1) - \rho_0 v^2]^2 \Delta(p, v) = 0, \quad (7.3.1)$$

unde

$$\begin{aligned}\Delta(p, v) &= \left[\left(\hat{\lambda} + 2\hat{\mu} \right) (p^2 + 1) - \rho_0 v^2 \right] \left\{ \left(\hat{\alpha} k + i\chi v \tau^* \zeta \right) (p^2 + 1)^2 + \left[k \left(\frac{1}{\chi^2} \hat{\xi} - \rho_0 \kappa v^2 \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{iv}{\chi} \left(\hat{\alpha} c + m\zeta - mT_0 \tau^* \right) \right] (p^2 + 1) - \frac{iv}{\chi} \left[c \left(\frac{1}{\chi^2} \hat{\xi} - \rho_0 \kappa v^2 \right) + \frac{m^2 T_0}{\chi^2} \right] \right\} \\ &\quad - \frac{k\hat{b}\hat{\gamma}}{\chi^2} (p^2 + 1)^2 + i\chi v \beta \left[\hat{\gamma} \zeta - T_0 (\hat{b} \tau^* + \beta \hat{\alpha}) \right] (p^2 + 1)^2 + \frac{iv}{\chi^3} \left[\beta m T_0 (\hat{b} + \hat{\gamma}) \right. \\ &\quad \left. + \hat{b} \hat{\gamma} c - \beta^2 T_0 (\hat{\xi} - \rho_0 \kappa \chi^2 v^2) \right] (p^2 + 1).\end{aligned}$$

Vom nota cu $p_i, i = 1, 2, \dots, 5$ soluțiile ecuației (7.3.1), cu partea imaginară pozitivă. La fel ca în Secțiunea 7.1, vom scrie soluția ca o combinație liniară de soluții proprii, iar înlocuind-o în condițiile la limită (7.1.1), vom obține următoarea ecuație seculară

$$T_{23}^{(3)} [(T_{22}^{(2)} T_{21}^{(1)} - T_{21}^{(2)} T_{22}^{(1)}) \Gamma_{45} + (T_{21}^{(2)} T_{22}^{(4)} - T_{22}^{(2)} T_{21}^{(4)}) \Gamma_{15} + (T_{22}^{(2)} T_{21}^{(5)} - T_{21}^{(2)} T_{22}^{(5)}) \Gamma_{14}] = 0, \quad (7.3.2)$$

unde

$$\begin{aligned}\Gamma_{45} &= h_2^{(4)} q_2^{(5)} - h_2^{(5)} q_2^{(4)}, \\ \Gamma_{15} &= h_2^{(1)} q_2^{(5)} - h_2^{(5)} q_2^{(1)}, \\ \Gamma_{14} &= h_2^{(1)} q_2^{(4)} - h_2^{(4)} q_2^{(1)}.\end{aligned} \quad (7.3.3)$$

7.3.1 Simulări numerice

Considerăm că semi-spațiul $X_2 \geq 0$ este alcătuit dintr-un material termoelastic poros, asemănător cuprului. Cu ajutorul programului Wofram Mathematica, vom rezolva grafic ecuația seculară (7.3.2). Pentru a evidenția soluția așteptată, vom introduce următoarea funcție

$$\mathcal{F}(\text{Re}(w), \text{Im}(w)) = |\mathcal{F}(w) \times 10^{-70}|, \quad (7.3.4)$$

unde

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(w) = T_{23}^{(3)} \left[\left(T_{22}^{(2)} T_{21}^{(1)} - T_{21}^{(2)} T_{22}^{(1)} \right) \Gamma_{45} + \left(T_{21}^{(2)} T_{22}^{(4)} - T_{22}^{(2)} T_{21}^{(4)} \right) \Gamma_{15} \right. \\ \left. + \left(T_{22}^{(2)} T_{21}^{(5)} - T_{21}^{(2)} T_{22}^{(5)} \right) \Gamma_{14} \right], \end{aligned} \quad (7.3.5)$$

și o vom reprezenta grafic, pentru $\text{Re}(w) \in (-500.0, -2000.0)$ și $\text{Im}(w) \in (0.0, -1500.0)$.

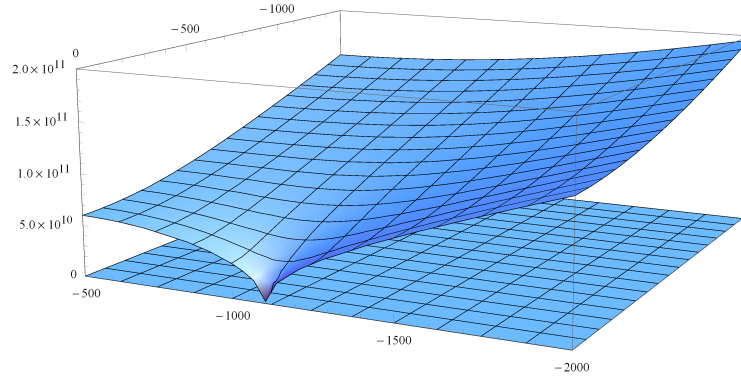


Figura 7.3.1: Graficul funcției $\mathcal{F}(\text{Re}(w), \text{Im}(w))$ pentru $\text{Re}(w) \in (-500.0, -2000.0)$ și $\text{Im}(w) \in (0.0, -1500.0)$.

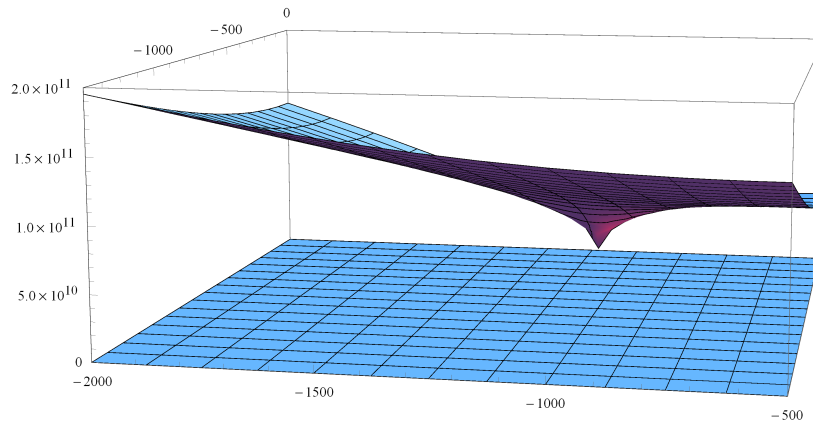


Figura 7.3.2: Graficul funcției $\mathcal{F}(\text{Re}(w), \text{Im}(w))$ pentru $\text{Re}(w) \in (-500.0, -2000.0)$ și $\text{Im}(w) \in (0.0, -1500.0)$.

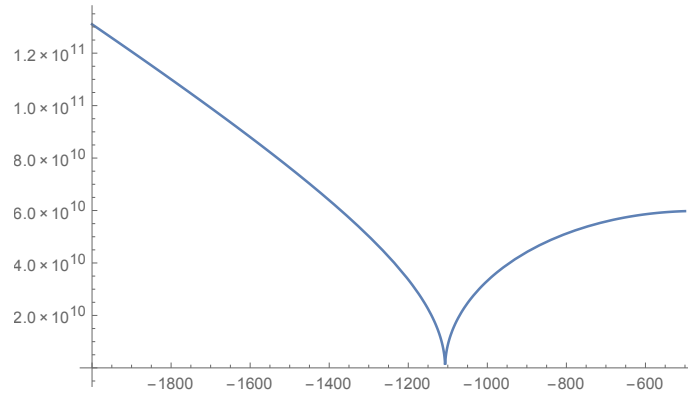


Figura 7.3.3: Graficul funcției $\mathcal{F}(\text{Re}(w), \text{Im}(w))$ pentru $\text{Re}(w) \in (-500.0, -2000.0)$ și $\text{Im}(w) = -0.1$.

Se poate observa că există un punct $w \approx -1100$ pentru care are loc relația (7.3.2). Putem concluziona că undele Rayleigh se propagă cu o amplitudine și cu o viteză mai mică decât în cazul izoterm (vezi Figurile 7.3.1- 7.3.3). Acest lucru poate fi explicat și prin faptul că disiparea din partea termoelastică nu este suficient de puternică.

De asemenea, pentru a evidenția punctul obținut, am reprezentat în Figura 7.3.4, graficul funcției $\mathcal{F}(\text{Re}(w), \text{Im}(w))^2$ pentru $\text{Re}(w) \in (-500.0, -1500.0)$ și $\text{Im}(w) \in (0.0, -500.0)$.

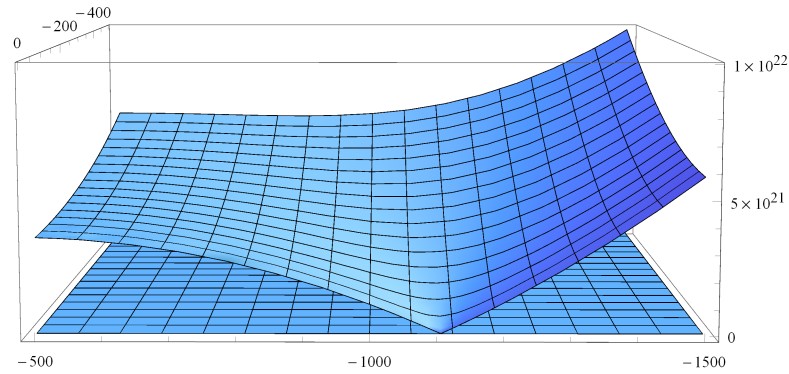


Figura 7.3.4: Graficul funcției $\mathcal{F}(\text{Re}(w), \text{Im}(w))^2$ pentru $\text{Re}(w) \in (-500.0, -1500.0)$ și $\text{Im}(w) \in (0.0, -500.0)$.

Bibliografie

- [1] H. Brezis. Functional Analysis, Sobolev Spaces, and Partial Differential Equations. *Springer-Verlag*, New York, 2010.
- [2] A. Bucur. On spatial behavior of the solution of a non-standard problem in linear thermoviscoelasticity with voids. *Archives of Mechanics*, **67**(4): 311–330, 2015.
- [3] A. Bucur. Spatial behavior in linear theory of thermoviscoelasticity with voids. *Journal of Thermal Stresses*, **38**(2): 229–249, 2015.
- [4] A. Bucur. Rayleigh surface waves problem in linear thermoviscoelasticity with voids. *Acta Mechanica*, **227**(4): 1199–1212, 2016.
- [5] A. Bucur. Existence and uniqueness in the linear theory of thermoviscoelastic materials with voids. *Annals of the University of Bucharest (Mathematical Series)*, 2016 (accepted).
- [6] A. Bucur. Spatial behavior in dynamical thermoviscoelasticity backward in time for porous media. *Journal of Thermal Stresses*, 2016 (accepted).
- [7] A.V. Bucur, F. Passarella, and V. Tibullo. Rayleigh surface waves in the theory of thermoelastic materials with voids. *Meccanica*, **49**(9): 2069–2078, 2014.
- [8] S. Chiriță. Thermoelastic surface waves on an exponentially graded half-space. *Mechanics Research Communications*, **49**: 27–35, 2013.
- [9] S. Chiriță and M. Ciarletta. Time-weighted surface power function method for the study of spatial behaviour in dynamics of continua. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, **18**(5): 915–933, 1999.
- [10] S. Chiriță and M. Ciarletta. Spatial behavior for some non-standard problems in linear thermoelasticity without energy dissipation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **367**(1): 58–68, 2010.
- [11] S. Chiriță, M. Ciarletta, and V. Tibullo. Rayleigh surface waves on a Kelvin-Voigt viscoelastic half-space. *Journal of Elasticity*, **115**(1): 61–76, 2014.

- [12] S. Chiriță and A. Scalia. On the spatial and temporal behavior in linear thermoelasticity of materials with voids. *Journal of Thermal Stresses*, **24**(5): 433–455, 2001.
- [13] M. Destrade. Seismic Rayleigh waves on an exponentially graded, orthotropic half-space. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **463**(2078): 495–502, 2007.
- [14] M.A. Goodman and S.C. Cowin. A continuum theory for granular materials. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **44**(4): 249–266, 1972.
- [15] D. Ieșan. A theory of thermoelastic materials with voids. *Acta Mechanica*, **60**(1): 67–89, 1986.
- [16] D. Ieșan. On a theory of thermoviscoelastic materials with voids. *Journal of Elasticity*, **104**(1): 369–384, 2011.
- [17] D. Ieșan. Thermoelastic Models of Continua. *Solid Mechanics and Its Applications*, **118**, Springer Netherlands, 2004.
- [18] F. Passarella and V. Tibullo. Some results in linear theory of thermoelasticity backward in time for microstretch materials. *Journal of Thermal Stresses*, **33**(6): 559–576, 2010.
- [19] I. Vrabie. Semigroups and Applications. *North-Holland Mathematics Studies*, **191**, North-Holland, Amsterdam, 2013.