

UNIVERSITATEA „ALEXANDRU IOAN CUZA” DIN IAȘI
FACULTATEA DE MATEMATICĂ



REZUMATUL TEZEI DE DOCTORAT

Coordonator Științific:
Prof. Dr. Sebastian ANIȚA

Student Doctorand:
Teodora BACIU

Iași, 2026

UNIVERSITATEA „ALEXANDRU IOAN CUZA” DIN IAȘI
FACULTATEA DE MATEMATICĂ



PROPRIETĂȚI DE STABILIZABILITATE PENTRU SISTEME DE TIP PRADĂ-PRĂDĂTOR CU DIFUZIE ÎN MEDIU SEZONIER

Coordonator Științific:
Prof. Dr. Sebastian ANIȚA

Student Doctorand:
Teodora BACIU

Iași, 2026

MULȚUMIRI

Doresc să îmi exprim recunoștința față de conducătorul meu de doctorat, domnul profesor Sebastian Anița, pentru cunoștințele pe care mi le-a transmis pe parcursul elaborării acestei lucrări și pentru timpul și efortul pe care le-a dedicat îndrumării acestei cercetări. Sub coordonarea dumnealui am fost introdusă pentru prima dată în domeniul dinamicii populațiilor, iar prin îndrumarea sa am dobândit metodele și instrumentele necesare pentru a aborda în mod riguros fenomenele biologice, în vederea predicției evoluției în timp a speciilor aflate în interacțiune.

Mulțumiri deosebite adresăm și colaboratorului nostru, domnului profesor Vincenzo Capasso, din cadrul Departamentului de Matematică, Università degli Studi di Milano "La Statale", pentru observațiile sale valoroase privind aspectele biologice, care ne-au ajutat să calibrăm sistemele studiate și să ne asigurăm că acestea reflectă în mod fidel procesele biologice naturale.

Doresc să îmi exprim recunoștința față de membrii comisiei de doctorat pentru timpul acordat și disponibilitatea de a face parte din aceasta. Le sunt recunoscătoare pentru îndrumarea și implicarea lor în elaborarea acestei teze.

Gândurile mele pline de recunoștință se îndreaptă către părinții mei, Cătălin și Mariana Baci, și către sora mea, Sabina Baci, pentru dragostea, sprijinul și încurajările oferite pe tot parcursul acestui drum îndelungat și solicitant. Le sunt profund recunoscătoare pentru numeroasele sacrificii și responsabilități pe care și le-au asumat, astfel încât eu să mă pot dedica acestei cercetări. Îi voi purta mereu în inimă și îi voi prețui întreaga mea viață.

În încheiere, doresc să îmi exprim recunoștința față de Dumnezeu pentru sănătatea și puterea de concentrare care au făcut posibilă finalizarea acestei teze.

Cuprins

Prezentare generală	3
1 Introducere	7
2 Stabilizarea la zero a unei populații invazive de prădători într-un mediu sezonier: control direct	11
2.1 Formularea problemei	11
2.2 Proprietăți fundamentale ale soluției slabe pentru un sistem general pradă-prădător	14
2.3 Eradicarea prădătorilor în cazul unui control cu acțiune directă	16
3 Stabilizarea la zero a unei populații invazive de prădători într-un mediu sezonier: strategii alternative de control	21
3.1 Eradicarea prădătorilor supuși unui control de tip recoltare	22
3.2 Eradicarea prădătorilor printr-un control de tip recoltare aplicat asupra prăzii	24
4 Stabilizarea la zero a unei populații de dăunători prin intermediul unui prădător într-un mediu sezonier	31
4.1 Formularea problemei	31
4.2 O condiție suficientă pentru eradicarea populației de dăunători	35
4.3 O condiție necesară pentru eradicarea populației de dăunători	36
Anexă	39
Direcții viitoare de cercetare	43
Bibliografie	48

Prezentare generală

Această teză este dedicată studiului modelelor pradă-prădător cu efecte sezoniere și mecanisme de control, cu un accent deosebit asupra eradicării uneia dintre cele două populații din sistemul analizat. Lucrarea este organizată în cinci capitole principale:

Capitolul 1 introduce cadrul matematic al tezei și prezintă principalele modele pradă-prădător considerate pe parcursul acestei lucrări. Se formulează sisteme de tip reacție-difuzie cu termeni de reacție atât locali, cât și nelocali, și se discută relevanța acestora în dinamica populațiilor. Reamintim apoi mai multe rezultate cunoscute privind eradicarea pentru modele cu coeficienți independenți de timp. În final, formulăm o clasă de noi probleme de eradicare care apar în prezența unor rate periodice în timp, oferind astfel cadrul pentru analiza dezvoltată în Capitolele 2 și 3.

Capitolul 2 este organizat după cum urmează. Secțiunea 2.1 prezintă formularea problemei, incluzând sistemul de ecuații cu derivate parțiale studiat și importanța sa. Secțiunea 2.2 este dedicată studiului proprietăților fundamentale ale soluțiilor slabe ale sistemului pradă-prădător în absența controlului (adică, atunci când $u \equiv 0$). În Secțiunea 2.3, deducem atât condiții necesare, cât și suficiente pentru eradicarea populației de prădători sub acțiunea unor controale generale aplicate prădătorilor pe un subdomeniu $\bar{\omega}$ al întregului habitat Ω .

Capitolul 3 continuă cu Secțiunea 3.1, care tratează eradicarea prădătorilor în cazul unui control de tip recoltare aplicat direct populației de prădători. În Secțiunea 3.2, investigăm eradicarea prădătorilor atunci când un control de tip recoltare este aplicat populației pradă, ceea ce conduce la o strategie de control indirect. Arătăm apoi că toate aceste probleme de eradicare sunt strâns legate de semnul autovalorii principale corespunzătoare unor operatori parabolici cu coeficienți periodici în timp.

Capitolul 4 este dedicat eradicării unei populații dăunătoare prin strategii de control biologic într-un mediu sezonier. Secțiunea 4.1 introduce sistemul de reacție-difuzie care modelează dinamica spațială a populațiilor de pradă și prădător. În Secțiunea 4.2, deducem o condiție suficientă pentru eradicarea populației dăunătoare h prin intermediul unui bio-control de tip infuzie adăugat populației de prădători într-un subdomeniu $\bar{\omega}$. Secțiunea 4.3 stabilește o condiție necesară pentru eradicare. Ca și în capitolul precedent, se arată că aceste probleme de eradicare sunt strâns legate de semnul autovalorii principale corespunzătoare unor operatori parabolici cu coeficienți periodici în timp.

Capitolul 4.3 prezintă posibile direcții viitoare de cercetare, care includ controlul regional al populației invazive prin optimizarea formei și amplasării regiunii de control, rezultate de eradicare în ipoteze mai slabe de regularitate asupra coeficienților, precum și extensii ale modelului prin incorporarea unor răspunsuri funcționale de tip Holling II și III.

În final, Anexa reunește mai multe definiții, rezultate tehnice și materiale auxiliare utilizate pe parcursul tezei. Pentru a păstra claritatea expunerii, aceste rezul-

tate sunt prezentate separat și includ demonstrații pentru argumente de monotonie, precum și rezultate de convergență pentru autovalori.

Rezultatele prezentate în această lucrare constituie contribuții originale la teoria ecuațiilor diferențiale și a sistemelor dinamice, cu aplicații în dinamica populațiilor și în modelele pradă-prădător.

Rezultatele **originale** sunt următoarele:

În Capitolul 2:

- Lema 2.5 stabilește existența, unicitatea și anumite proprietăți ale soluției slabe pentru sistemul pradă-prădător analizat.
- Teorema 2.6 furnizează o condiție necesară pentru eradicarea prădătorului, în timp ce Teorema 2.7 oferă o condiție suficientă pentru realizarea eradicării atunci când este implementat un control de tip impuls.

În Capitolul 3:

- Pentru controlul de tip recoltare, Teorema 3.1 furnizează condiția suficientă, iar Teorema 3.2 furnizează condiția necesară pentru eradicare. În toate cazurile, aceste condiții sunt caracterizate prin semnul unei autovalori principale asociate unei probleme de autovalori adecvate.
- Atunci când suntem interesați de eradicarea populației de prădători în mod indirect, prin acțiuni asupra prăzii, obținem condiții suficiente pentru eradicare, date de Teorema 3.3 și Teorema 3.5.

În Capitolul 4:

- Teorema 4.3 oferă o condiție suficientă, iar Teorema 4.4 oferă o condiție necesară pentru eradicarea unei populații de dăunători prin intermediul unui prădător, făcând apel, din nou, la semnul autovalorii principale adecvate.

Rezultatele acestei cercetări au fost publicate în reviste de prestigiu:

1. Sebastian Anița, **Teodora Baci**, Vincenzo Capasso, *Eradicating an alien predator population in a seasonal environment*, **Mathematical Methods in the Applied Sciences** (IF: 1.8, RIS: 0.913), 48 (8) (2025), 9126-9139, <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/mma.10785>.

Această lucrare a fost citată de: João Carlos Barreira, Maicon Sonego, Enrique Zuazua, *Boundary and Interior Control in a Diffusive Lotka-Volterra Model*, *Journal of Differential Equations*, 466 (2026), <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022039626001646>.

2. **Teodora Baci**, *Eradicating a pest population via a predator in a seasonal environment*, **Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series B** (IF: 1.3, RIS: 1.066), 33 (2026), 92-109, <https://www.aims.org/article/doi/10.3934/dcdsb.2025145>.

Câteva dintre aceste rezultate au fost diseminate în cadrul următoarelor conferințe:

1. International Scientific Conference “Mathematics & IT: Research and Education” (MITRE), Ediția a X-a, 26 - 29 Iunie, 2025, Chișinău, Republica Moldova, <https://mitre.usm.md/>.

Titlul Prezentării: *Predicting predator extinction in space and time.*

2. International Conference on Mathematical Methods and Models in Biosciences and a School for Young Scientists (BIOMATH), 15 - 20 Iunie, 2025, Sofia, Bulgaria, <https://www.biomath.bg/2025/>.

Titlul Prezentării: *Stabilization of a prey-predator system via targeted control in space and across populations.*

3. Workshop for Young Researchers in Mathematics (WYRM), Ediția a XIV-a, 15 - 16 Mai, 2025, Iași, România, <https://fmi.univ-ovidius.ro/en/cercetare/wyrm2025/>.

Titlul Prezentării: *Control strategies for the stabilization of a predator population in a reaction-diffusion system.*

4. Sesiunea de Comunicări Științifice, în cadrul evenimentului Zilele Universității “Alexandru Ioan Cuza”, organizată de Universitatea “Alexandru Ioan Cuza” din Iași, 25 Octombrie, 2024, Iași, România, <https://www.math.uaic.ro/con-tinut/download/download.php>

Titlul Prezentării: *Conditions for the stabilization of reaction-diffusion systems.*

5. Sesiunea de Comunicări Științifice Studentești, Matematică, organizată de Universitatea “Babeș Bolyai” Departamentul de Matematică, Cluj, 25 Mai, 2024, <https://math.ubbcluj.ro/cssm/2024/index.html>

Titlul Prezentării: *Conditions for the eradicability of an alien population by regional controls in a reaction-diffusion system.*

1 Introducere

Studiul dinamicii populațiilor constituie de mult timp o temă centrală în matematica aplicată, iar sistemele pradă-răpitor reprezintă unul dintre cele mai naturale și mai studiate cadre pentru modelarea interacțiunii dintre două specii. Atunci când se ține cont de eterogenitatea spațială, difuzie și variabilitatea sezonieră, aceste sisteme conduc la ecuații de reacție-difuzie cu coeficienți periodici în timp, a căror analiză matematică necesită instrumente din teoria ecuațiilor cu derivate parțiale. Teza prezintă contribuie la acest domeniu prin dezvoltarea unui cadru matematic riguros pentru analiza fenomenelor de eradicare în sisteme de tip pradă-răpitor sezoniere, cu strategii de control localizate spațial într-un subdomeniu $\omega \subset \Omega$, unde Ω este habitatul celor două populații.

Cadrul matematic general și modelele abordate

Punctul de plecare îl constituie sistemul pradă-răpitor clasic Lotka-Volterra, extins pentru a include eterogenitatea spațială, difuzia și interacțiunile nelocale, ceea ce conduce la sisteme de reacție-difuzie definite pe un domeniu mărginit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (sau $\mathbb{R}^3$) cu condiții la frontieră Neumann omogene.

Sistemul principal, analizat în Capitolele 2 și 3 ale tezei, are forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t}(x, t) = r(x, t)h(x, t) - g(x, t)h(x, t)^2 + d_1 \Delta h(x, t) \\ \quad - h(x, t) \int_{\Omega} k(x, x')p(x', t) dx', \quad (x, t) \in \Omega \times (0, \infty), \\ \frac{\partial p}{\partial t}(x, t) = -a(x, t)p(x, t) + d_2 \Delta p(x, t) \\ \quad + c_0 p(x, t) \int_{\Omega} k(x', x)h(x', t) dx', \quad (x, t) \in \Omega \times (0, \infty), \\ \frac{\partial h}{\partial n}(x, t) = \frac{\partial p}{\partial n}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty), \\ h(x, 0) = h_0(x), \quad p(x, 0) = p_0(x), \quad x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (1.1)$$

Aici $h(x, t)$ și $p(x, t)$ desemnează densitățile populației pradă și, respectiv, prădătoare, $r(x, t)$ este rata de creștere intrinsecă periodică a prăzii, $a(x, t)$ este rata naturală de descreștere a populației prădătoare, $d_1, d_2 > 0$ sunt coeficienți de difuzie, iar nucleul $k(x, x')$ descrie caracterul nelocal al predării și anume modul în care un prădător aflat în locația x' capturează pradă în locația x și se întoarce la locația sa inițială. **În acest context obiectivul este eradicarea populației dăunătoare de prădători p și conservarea populației pradă h .**

Un al doilea sistem, analizat în Capitolul 4 al tezei, **inversează obiectivul de eradicare: prada h reprezintă acum o populație parazită care urmează a fi eliminată prin introducerea unei specii de prădători p , ce acționează ca agent de**

control biologic. Sistemul analizat are următoarea formă:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t}(x, t) = r(x, t)h(x, t) - g(x, t)h(x, t)^2 + d_1 \Delta h(x, t) \\ \quad - h(x, t) \int_{\Omega} k(x, x')p(x', t)dx', \quad (x, t) \in \Omega \times (0, \infty), \\ \frac{\partial p}{\partial t}(x, t) = -a(x, t)p(x, t) - \tilde{g}(x, t)p(x, t)^2 + d_2 \Delta p(x, t) \\ \quad + c_0 h(x, t) \int_{\Omega} k(x, x')p(x', t)dx', \quad (x, t) \in \Omega \times (0, \infty), \\ \frac{\partial h}{\partial n}(x, t) = \frac{\partial p}{\partial n}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty), \\ h(x, 0) = h_0(x), \quad p(x, 0) = p_0(x), \quad x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (1.2)$$

Aici ecuația prădătorului conține un termen logistic suplimentar $\tilde{g}(x, t)p(x, t)^2$ și un răspuns funcțional nelocal diferit, dat de $c_0 h(x, t) \int_{\Omega} k(x, x')p(x', t)dx'$, care reflectă ipoteza că prădătorii nu se întorc la locația inițială după capturarea prăzii, ci rămân în regiunea ocupată anterior de aceasta.

În ambele configurații, problema de eradicare este formulată ca zero-stabilizarea populației țintă în $L^\infty(\Omega)$, pentru $t \rightarrow \infty$.

Strategii de control

Atunci când ne interesează eradicarea (sau zero-stabilizarea) unei populații de prădători sau dăunători printr-un control regional u , forma sistemului controlat se modifică în funcție de metoda de control aplicată.

O primă strategie constă aplicarea unui **control direct de tip recoltare, care acționează exclusiv asupra populației prădătoare** p . Astfel, introducând $u(x, t) := -\gamma \Psi(x) \mathbb{1}_\omega(x) p(x, t)$ în a doua ecuație din (1.1), obținem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t}(x, t) &= -a(x, t)p(x, t) + d_2 \Delta p(x, t) \\ &\quad + c_0 p(x, t) \int_{\Omega} k(x', x)h(x', t)dx' - \gamma \Psi(x) \mathbb{1}_\omega(x) p(x, t), \end{aligned} \quad (1.3)$$

pentru $(x, t) \in \Omega \times (0, \infty)$. Aici $\mathbb{1}_\omega$ desemnează funcția caracteristică a regiunii de control ω , iar Ψ reprezintă eficiența de recoltare, care variază în funcție de domeniul de acțiune al controlului. Teorema 3.1 stabilește că pozitivitatea autovalorii principale λ_1^γ , a problemei de autovalori parabolice asociate, este suficientă pentru eradicare, iar Teorema 3.2 furnizează condiția necesară corespunzătoare.

Un alt tip de intervenție este dat de **controlul impulsiv**, care modelează o **eliminare locală instantanee a indivizilor prădători**. Astfel, introducând $u(x, t) := -p_0(x) \mathbb{1}_\omega(x) \delta_0(t) + u_1(x, t)$ în a doua ecuație din (1.1), obținem:

$$\frac{\partial p}{\partial t}(x, t) = -a(x, t)p(x, t) + d_2 \Delta p(x, t)$$

$$+ c_0 p(x, t) \int_{\Omega} k(x', x) h(x', t) dx' - p_0(x) \mathbb{1}_{\omega}(x) \delta_0(t) + u_1(x, t), \quad (1.4)$$

unde $\delta_0(t)$ este funcția Dirac, iar $u_1(\cdot, t) \in (H^1(\Omega))^*$ este o funcțională liniară definită corespunzător. O condiție necesară pentru eradicarea prădătorilor este obținută în Teorema 2.6, iar Teorema 2.7 furnizează o condiție suficientă.

Alternativ, putem utiliza un **control indirect de tip recoltare, ușor de implementat, care acționează asupra prăzii** h , pentru a eradica populația de prădători p . Astfel, introducând $u(x, t) := -\gamma \Psi(x) \mathbb{1}_{\omega}(x) h(x, t)$ în prima ecuație din (1.1), obținem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t}(x, t) = & r(x, t)h(x, t) - g(x, t)h(x, t)^2 + d_1 \Delta h(x, t) \\ & - h(x, t) \int_{\Omega} k(x, x') p(x', t) dx' - \gamma \Psi(x) \mathbb{1}_{\omega}(x) h(x, t), \end{aligned} \quad (1.5)$$

pentru $(x, t) \in \Omega \times (0, \infty)$. Aceasta este o strategie de control indirectă deoarece, prin suprimarea populației pradă în ω , prădătorii sunt privați de hrană și sunt conduși spre extincție, dar fără a se compromite viabilitatea populației pradă. Condiții suficiente pentru eradicarea prădătorilor în acest context indirect sunt obținute în Teoremele 3.3 și 3.5.

În sfârșit, dacă lucrăm cu un **control direct de tip infuzie, care acționează exclusiv asupra prădătorilor** p , pentru eradicarea populației parazite h , și introducem controlul $u(x, t) := +\gamma \Psi(x) p(x, t)$ în a doua ecuație din (1.2), atunci obținem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t}(x, t) = & -a(x, t)p(x, t) - \tilde{g}(x, t)p(x, t)^2 + d_2 \Delta p(x, t) \\ & + c_0 p(x, t) \int_{\Omega} k(x', x) h(x', t) dx' + \gamma \Psi(x) p(x, t), \end{aligned} \quad (1.6)$$

pentru $(x, t) \in \Omega \times (0, \infty)$. Aici γ cuantifică efortul de infuzie, iar Ψ reflectă eficiența acestui efort. Teorema 4.3 stabilește o condiție suficientă pentru eradicarea dăunătorului, iar Teorema 4.4 furnizează condiția necesară corespunzătoare.

2 Stabilizarea la zero a unei populații invazive de prădători într-un mediu sezonier: control direct

2.1 Formularea problemei

Scopul acestui capitol este de a extinde analiza realizată în [11] și se axează pe eradicarea unei populații de dăunători ce funcționează ca prădător al unei specii pradă. Considerăm un sistem pradă-prădător a cărui dinamică este descrisă de următorul sistem de reacție-difuzie cu termeni de reacție nelocali

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t}(x, t) = r(x, t)h(x, t) - g(x, t)h(x, t)^2 \\ \quad + d_1 \Delta h(x, t) - h(x, t) \int_{\Omega} k(x, x')p(x', t)dx', \quad (x, t) \in Q, \\ \frac{\partial p}{\partial t}(x, t) = -a(x, t)p(x, t) + d_2 \Delta p(x, t) \\ \quad + c_0 p(x, t) \int_{\Omega} k(x', x)h(x', t)dx', \quad (x, t) \in Q, \\ \frac{\partial h}{\partial n}(x, t) = \frac{\partial p}{\partial n}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Sigma, \\ h(x, 0) = h_0(x), \quad p(x, 0) = p_0(x), \quad x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Aici $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ este un domeniu mărginit (unde $N \in \{2, 3\}$), cu frontiera $\partial\Omega$ netedă (de clasă C^∞); $Q = \Omega \times (0, \infty)$; $\Sigma = \partial\Omega \times (0, \infty)$.

Termenii $h(x, t)$ și $p(x, t)$ desemnează densitățile populațiilor pradă, respectiv prădătoare, într-un punct x și la momentul t . De asemenea, $h_0(x)$ și $p_0(x)$ desemnează densitățile inițiale ale populațiilor pradă, respectiv prădătoare, într-un punct $x \in \Omega$.

Operatorul Laplace modelează dispersia aleatoare a celor două populații în habitatul lor Ω . Condițiile omogene la frontieră, de tip Neumann, exprimă faptul că presupunem absența oricărui flux al populațiilor prin frontiera habitatului. Coeficienții de difuzie, d_1 și d_2 , sunt considerați constante pozitive. Astfel:

- $r(x, t)$ desemnează rata naturală de creștere a populației pradă;
- $a(x, t)$ desemnează rata naturală de descreștere a populației prădătoare (care corespunde cazului prădătorilor specializați, atunci când a este pozitivă peste tot);
- $g(x, t)$ desemnează coeficientul termenului logistic (gh^2) pentru populația pradă;
- $k(x, x')$ desemnează rata de capturare a unei păzi aflate în locația x de către un prădător aflat în locația x' .

Ca o primă generalizare, parametrii sunt acum considerați dependenți de timp, periodici, cu o perioadă T de un an. Spunem că o funcție q este periodică, de perioadă $T > 0$ (sau T -periodică), dacă $q(x, t) = q(x, t + T)$, pentru orice $(x, t) \in Q$.

O modificare suplimentară față de problema tratată în [11] privește operatorul nelocal care descrie prădarea: în [11] prădătorii urmăresc pradă (prădătorii se deplasează dintr-o locație x' pentru a captura o pradă aflată în locația x și nu se întorc în locația lor inițială); aici prădătorii aflați inițial în locația x' , după capturarea indivizilor din locația x , se întorc în locul din care au plecat. Acesta este motivul pentru care modelul se inspiră dintr-un fenomen natural, precum o populație de carnivore care vânează ierbivore. Carnivorele tind să se deplaseze pentru a vâna într-o anumită zonă, dar apoi se întorc în locația lor inițială, deoarece își lasă puii în urmă (a se vedea operatorul integral care descrie prădarea în (2.1)). Populația pradă capturată este transformată în biomasă printr-o rată de conversie $c_0 > 0$.

Observăm că $h(x, t) \int_{\Omega} k(x, x')p(x', t)dx'$ reprezintă densitatea populației pradă capturată în locația x la momentul t ; aceasta poate fi scrisă sub forma $hB(p)$. Răspunsul funcțional la prădare, dat de $c_0p(x, t) \int_{\Omega} k(x', x)h(x', t)dx'$, reprezintă creșterea populației de prădători datorată prădării; aceasta poate fi scrisă sub forma $c_0pB^*(h)$, unde B este un operator liniar și mărginit într-un spațiu funcțional adecvat (care este $L^2(\Omega)$); acesta nu este autoadjunct (B^* desemnează adjunctul său).

Obiectivul nostru este de a investiga posibilitatea de a eradica (stabiliza la zero) populația de prădători printr-un control u care acționează direct asupra populației de prădători p . Vom arăta că eradicarea populației de prădători este legată de semnul autovalorii principale a unei anumite probleme parabolice periodice în timp.

Sistemul controlat poate fi scris sub forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t}(x, t) = r(x, t)h(x, t) - g(x, t)h(x, t)^2 \\ \quad + d_1 \Delta h(x, t) - h(x, t) \int_{\Omega} k(x, x')p(x', t)dx', \quad (x, t) \in Q, \\ \frac{\partial p}{\partial t}(x, t) = -a(x, t)p(x, t) + d_2 \Delta p(x, t) \\ \quad + c_0p(x, t) \int_{\Omega} k(x', x)h(x', t)dx' + u(x, t), \quad (x, t) \in Q, \\ \frac{\partial h}{\partial n}(x, t) = \frac{\partial p}{\partial n}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Sigma, \\ h(x, 0) = h_0(x), \quad p(x, 0) = p_0(x), \quad x \in \Omega \end{array} \right. \quad (2.2)$$

iar eradicarea populației de prădători prin controlul u înseamnă că

$$p(\cdot, t) \rightarrow 0, \quad \text{în } L^\infty(\Omega), \text{ pentru } t \rightarrow \infty,$$

unde (h, p) este soluția lui (2.2). Observăm că aceasta este o problemă de zero-stabilizabilitate cu restricții asupra stării, deoarece $h(x, t), p(x, t)$ sunt densități ale populațiilor, deci trebuie să fie nenegative.

Există în literatura matematică mai multe rezultate privind stabilizabilitatea sistemelor de tip reacție-difuzie cu restricții asupra stării; a se vedea, de exemplu, [13], [11] și referințele conținute acolo. După cunoștințele noastre, toată literatura citată tratează rate (coeficienți) independente de timp sau independente de spațiu. Deoarece dinamica sistemelor pradă-prădător este supusă în mod natural unei dependențe sezoniere (prin ratele r, g, a), este o motivație bună pentru a impune ca aceste rate să fie periodice în timp (și dependente de spațiu).

O particularitate a abordării noastre constă în analiza eradicării populației de prădători prin acțiunea într-o submulțime (posibil) mică $\bar{\omega}$ a întregului habitat Ω (astfel încât costurile de implementare a controlului să fie mici). Aici ω este o mulțime deschisă, cu frontieră de clasă C^∞ , astfel încât $\omega \subset \subset \Omega$ și $\Omega \setminus \bar{\omega}$ este un domeniu.

În cele ce urmează vom lucra cu următoarele ipoteze:

(A1) $r, g, a \in C^1(\bar{Q}), T \in (0, \infty)$,

$$r(x, t + T) = r(x, t), \quad g(x, t + T) = g(x, t), \quad a(x, t + T) = a(x, t), \quad (2.3)$$

pentru orice $(x, t) \in \bar{Q}$.

Există $r_0 \in C([0, \infty))$, $r_0(t + T) = r_0(t)$, pentru orice $t \geq 0$ astfel încât

$$r(x, t) \geq r_0(t), \quad \text{pentru orice } (x, t) \in \bar{Q} \quad \text{și} \quad \int_0^T r_0(t) dt > 0 \quad (2.4)$$

(această ultimă ipoteză asupra lui r_0 implică faptul că populația pradă persistă în absența prădătorilor).

Există o constantă $\rho_0 \in (0, \infty)$ astfel încât

$$g(x, t) \geq \rho_0, \quad \text{pentru orice } (x, t) \in \bar{Q}, \quad (2.5)$$

ceea ce înseamnă că avem un termen logistic nenul în orice moment. Acesta poate fi foarte mic, dar este nenul, adică există competiție între indivizii populației h în orice moment. Astfel, orice număr mic de indivizi care interacționează între ei, concurează totuși pentru resurse;

(A2) $k \in C^1(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega})$, $k(x, x') \geq 0$, pentru orice $(x, x') \in \Omega \times \Omega$, $c_0 \in (0, \infty)$;

(A3) $h_0, p_0 \in L^\infty(\Omega)$ și $h_0(x), p_0(x) \geq 0$, a.p.t. $x \in \Omega$;

Dacă privim p ca densitatea unei populații dăunătoare străine, atunci ne interesează să știm dacă există un control u ce acționează în $\bar{\omega}$ (într-un anumit spațiu funcțional) astfel încât soluția (într-un anumit sens) (h^u, p^u) a lui (2.2) sau a lui (2.1) (modificat ulterior fie ca în (1.3), fie ca în (1.5)) să satisfacă $h^u(x, t), p^u(x, t) \geq 0$, pentru orice $x \in \Omega$ și $t \geq 0$, și $\lim_{t \rightarrow \infty} p^u(\cdot, t) = 0$, într-un spațiu funcțional adecvat.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p^u(\cdot, t) = 0 \quad \text{in } L^\infty(\Omega). \quad (2.7)$$

2.2 Proprietăți fundamentale ale soluției slabe pentru un sistem general pradă-prădător

Vom arăta în această secțiune că, în ipoteze mai generale asupra ratelor, există o unică soluție slabă a lui (2.1) cu componente nenegative și local esențial mărginite în $\bar{Q}$.

Pentru început, să considerăm următorul sistem de tip reacție-difuzie

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial w_1}{\partial t}(x,t) = d_1 \Delta w_1(x,t) + L_{11}(x,t)w_1(x,t) + L_{12}(x,t)w_2(x,t) & \\ & + f_1(x,t), \quad (x,t) \in Q, \\ \frac{\partial w_2}{\partial t}(x,t) = d_2 \Delta w_2(x,t) + L_{21}(x,t)w_1(x,t) + L_{22}(x,t)w_2(x,t) & \\ & + f_2(x,t), \quad (x,t) \in Q, \\ \frac{\partial w_1}{\partial n}(x,t) = \frac{\partial w_2}{\partial n}(x,t) = 0, & (x,t) \in \Sigma, \\ w_1(x,0) = w_{01}(x), \quad w_2(x,0) = w_{02}(x), & x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (2.8)$$

Definiția 2.2 Fie $d, \tilde{T} \in (0, \infty)$, $\alpha \in L^\infty(\Omega \times (0, \tilde{T}))$, $f \in L^2(0, \tilde{T}; (H^1(\Omega))^*)$ și date inițiale $y_0 \in L^2(\Omega)$. Să reamintim că o soluție slabă pentru problema

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t}(x, t) = \alpha(x, t) y(x, t) + d\Delta y(x, t) + f(x, t), & (x, t) \in \Omega \times (0, \tilde{T}), \\ \frac{\partial y}{\partial n}(x, t) = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, \tilde{T}), \\ y(x, 0) = y_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (2.9)$$

este o funcție y care satisface

$$(i) \quad y \in L^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega)) \cap C([0, \tilde{T}]; L^2(\Omega)) \cap W^{1,2}(0, \tilde{T}; (H^1(\Omega))^*);$$

(ii) $\left\langle \frac{dy}{dt}(t), v \right\rangle = \int_{\Omega} \alpha(x, t) y(x, t) v(x) dx - d \int_{\Omega} \nabla y(x, t) \cdot \nabla v(x) dx + \langle f(t), v \rangle$,
a.p.t. $t \in (0, \tilde{T})$ și pentru orice $v \in H^1(\Omega)$ (aici $\langle \cdot, \cdot \rangle$ reprezintă asocierea dintre $(H^1(\Omega))^*$ și $H^1(\Omega)$);

$$(iii) \quad y(x, 0) = y_0(x), \text{ a.p.t. } x \in \Omega.$$

Remarca 2.3 Din [27, Théorème X.9, J. L. Lions] obținem că, pentru orice funcție $\alpha \in L^\infty(\Omega \times (0, \tilde{T}))$, $f \in L^2(0, \tilde{T}; (H^1(\Omega))^*)$ și dată inițială $y_0 \in L^2(\Omega)$, problema (2.9) admite o unică soluție slabă y .

Mai mult, dacă $y_0 \in L^2(\Omega)$ și $f \in L^2(0, \tilde{T}; L^2(\Omega))$, atunci soluția slabă y satisface, în plus (a se vedea [18]), că

$$(j) \quad y \in AC((0, \tilde{T}); L^2(\Omega)) \cap L^2_{loc}((0, \tilde{T}); H^2(\Omega));$$

$$(jj) \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x, t) = \alpha(x, t)y(x, t) + d\Delta y(x, t) + f(x, t), \text{ a.p.t. } (x, t) \in \Omega \times (0, \tilde{T});$$

$$(jjj) \quad \frac{\partial y}{\partial n}(x, t) = 0, \text{ a.p.t. } (x, t) \in \partial\Omega \times (0, \tilde{T}).$$

Dacă y este o soluție slabă a lui (2.9) pentru orice $\tilde{T} \in (0, \infty)$, atunci spunem că y este o soluție slabă a lui (2.9) pentru $\tilde{T} := \infty$.

Dacă se consideră alte condiții la frontieră omogene, atunci se poate defini în mod analog o noțiune de soluție slabă. Sistemul (2.8) este format dintr-o pereche de ecuații parabolice liniare precum (2.9) (unde $d := d_1, \alpha = 0, f := L_{11}w_1 + L_{12}w_2 + f_1, y_0 := w_{01}$ și $d := d_2, f := L_{21}w_1 + L_{22}w_2 + f_2, y_0 := w_{02}$, respectiv) și astfel o soluție slabă (w_1, w_2) a lui (2.8) este o pereche de două soluții slabe pentru două ecuații parabolice, pentru orice $\tilde{T} > 0$, respectiv.

Rezultatul următor se bazează pe [46, Theorem 10.11].

Lema 2.4 Fie $w_{01}, w_{02} \in L^2(\Omega)$, $L_{ij} \in L^\infty_{loc}(\bar{\Omega} \times [0, \infty))$, $f_i \in L^2_{loc}(\bar{\Omega} \times [0, \infty))$, pentru $i, j \in \{1, 2\}$, ce satisfac

$$w_{01}(x), w_{02}(x) \geq 0, \text{ a.p.t. } x \in \Omega, \quad L_{12}(x, t), L_{21}(x, t) \geq 0, \text{ a.p.t. } (x, t) \in Q$$

și

$$f_1(x, t), f_2(x, t) \geq 0, \text{ a.p.t. } (x, t) \in Q.$$

Atunci există o unică soluție slabă (w_1, w_2) a lui (2.8) cu ambele componente nenegative.

În plus, pentru $i = \overline{1, 2}$,

$$(j)' \quad w_i \in AC((0, \infty); L^2(\Omega)) \cap L^2_{loc}((0, \infty); H^2(\Omega));$$

$$(jj)' \quad \frac{\partial w_i}{\partial t}(x, t) = d_i \Delta w_i(x, t) + L_{i1}(x, t)w_1(x, t) + L_{i2}(x, t)w_2(x, t) + f_i(x, t), \text{ a.p.t. } (x, t) \in Q;$$

$$(jjj)' \quad \frac{\partial w_i}{\partial n}(x, t) = 0, \text{ a.p.t. } (x, t) \in \Sigma.$$

Să revenim la proprietățile fundamentale ale soluției slabe a sistemului pradă-prădător (2.1) (modificat fie ca în (3.1), fie ca în (3.2)).

Putem privi un astfel de sistem ca o pereche de două ecuații parabolice precum cele din (2.9) (unde d, f, y_0 sunt alese în mod convenabil). Așadar, o soluție slabă a unei astfel de probleme este o pereche de două soluții slabe pentru ecuațiile parabolice corespunzătoare.

În mod analog, o soluție slabă a lui (2.1) poate fi definită corespunzător unui interval de timp finit $[0, \tilde{T}]$ și lui $Q_{\tilde{T}}$ și $\Sigma_{\tilde{T}}$, în locul lui Q și Σ .

Lema următoare stabilește existența și unicitatea unei soluții slabe cu componente nenegative și local esențial mărginite în $\bar{Q}$ pentru sistemul (2.1), în ipoteze mai puțin restrictive asupra datelor de intrare (în locul lui (A1) și (A2))

$$(A1)' \quad r, g, a \in L_{loc}^{\infty}(\bar{Q}),$$

$$g(x, t) \geq \rho_0 > 0, \quad \text{a.p.t. } (x, t) \in Q;$$

$$(A2)' \quad k \in L^{\infty}(\Omega \times \Omega), \quad k(x, x') \geq 0, \text{ a.p.t. } (x, x') \in \Omega \times \Omega.$$

Lema 2.5 *Dacă (A1)', (A2)', (A3) au loc, atunci sistemul (2.1) admite o unică soluție slabă (h, p) , cu ambele componente nenegative și local esențial mărginite în $\bar{Q}$ (adică $h(x, t), p(x, t) \geq 0$, a.p.t. $x \in \Omega$, pentru orice $t \geq 0$, și $h, p \in L_{loc}^{\infty}(\bar{Q})$).*

În plus

$$(j)'' \quad h, p \in AC((0, \infty); L^2(\Omega)) \cap L_{loc}^2((0, \infty); H^2(\Omega));$$

$$(jj)'' \quad \begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t}(x, t) = r(x, t)h(x, t) - g(x, t)h(x, t)^2 + d_1 \Delta h(x, t) \\ \quad - h(x, t) \int_{\Omega} k(x, x')p(x', t) dx', \quad \text{a.p.t. } (x, t) \in Q, \\ \frac{\partial p}{\partial t}(x, t) = -a(x, t)p(x, t) + d_2 \Delta p(x, t) \\ \quad + c_0 p(x, t) \int_{\Omega} k(x', x)h(x', t) dx', \quad \text{a.p.t. } (x, t) \in Q, \end{cases}$$

$$(jjj)'' \quad \frac{\partial h}{\partial n}(x, t) = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial n}(x, t) = 0, \quad \text{a.p.t. } (x, t) \in \Sigma.$$

2.3 Eradicarea prădătorilor în cazul unui control cu acțiune directă

Revenim la cazul ipotezelor (A1) - (A3). În această secțiune, investigăm eradicarea populației de prădători în condiții specifice. Pentru a realiza acest lucru, ne bazăm pe Teorema 5.5. Totuși, acest rezultat se aplică numai ecuațiilor cu coeficienți periodici, ceea ce nu este cazul coeficientului din termenul de reacție din ecuația (2.1) satisfăcută de p . Pentru a depăși această limitare vom utiliza comparații adecvate pentru h și p .

Fie u un control astfel încât (2.2) admite o unică soluție slabă (h, p) cu componente nenegative și local esențial mărginite în $\bar{Q}$.

Fie $\bar{h}$ soluția slabă nenegativă și local esențial mărginită în $\bar{Q}$ a următoarei ecuații parabolice

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{h}}{\partial t}(x, t) = r(x, t)\bar{h}(x, t) - g(x, t)\bar{h}(x, t)^2 + d_1 \Delta \bar{h}(x, t), & (x, t) \in Q, \\ \frac{\partial \bar{h}}{\partial n}(x, t) = 0, & (x, t) \in \Sigma, \\ \bar{h}(x, 0) = \bar{h}_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (2.10)$$

unde $\bar{h}_0 \in C^2(\bar{\Omega})$, $\bar{h}_0(x) \geq 0$, pentru orice $x \in \Omega$, $\bar{h}_0$ nu este identic 0 și $\frac{\partial \bar{h}_0}{\partial n}(x) = 0$ pentru orice $x \in \partial\Omega$.

Obținem existența și unicitatea soluției slabe pentru (2.10), cu componente nenegative și local esențial mărginite în $\bar{Q}$, prin Lema 2.5. Observăm că $\bar{h}$ este o soluție slabă în sensul Definiției 2.2, și satisface de asemenea condițiile mai tari menționate în Remarca 2.3. Aplicând Propoziția 5.4 problemei (2.10), obținem că $\bar{h}$ este o **soluție global regulată**, ceea ce înseamnă că

$$\bar{h} \in C(\bar{\Omega} \times [0, \infty)) \cap C_{loc}^{2+\eta, 1+\frac{\eta}{2}}(\bar{\Omega} \times (0, \infty)), \quad \text{cu } \eta \in (0, 1) \quad (2.11)$$

și satisface, de asemenea, (2.10).

Observăm că, dacă considerăm $\bar{h}(x, 0) \stackrel{\text{def}}{=} \|h_0\|_{L^\infty(\bar{\Omega})}$, atunci, utilizând principiul de comparație, rezultă că

$$0 \leq h(x, t) \leq \bar{h}(x, t), \quad \text{a.p.t. } x \in \bar{\Omega} \text{ și pentru orice } t > 0. \quad (2.12)$$

Aplicând (i₃) din Teorema 5.6 problemei (2.10) obținem existența unei unice soluții global regulate, netriviiale, pozitive, T -periodice, h^* pentru

$$\begin{cases} \frac{\partial h^*}{\partial t}(x, t) = r(x, t)h^*(x, t) - g(x, t)h^*(x, t)^2 + d_1 \Delta h^*(x, t), & (x, t) \in Q, \\ \frac{\partial h^*}{\partial n}(x, t) = 0, & (x, t) \in \Sigma, \\ h^*(x, t) = h^*(x, t + T), & (x, t) \in Q \end{cases} \quad (2.13)$$

astfel încât

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\bar{h}(\cdot, t) - h^*(\cdot, t)\|_{C(\bar{\Omega})} = 0. \quad (2.14)$$

Pe lângă faptul că este o soluție global regulată, deoarece h^* este o funcție periodică, avem de asemenea că

$$h^* \in C^{2+\eta, 1+\frac{\eta}{2}}(\bar{\Omega} \times [0, \infty)), \quad \text{pentru un } \eta \in (0, 1).$$

Să evidențiem câteva proprietăți ale funcției h^* . Din rezultatul menționat mai sus obținem că $h^*(t, x) > 0$, pentru orice $(x, t) \in \bar{Q}$. Dar h^* este de asemenea o soluție global regulată, deci este continuă pe $\bar{Q}$.

Deoarece h^* este periodică, rezultă că există $h^0 > 0$, astfel încât

$$h^*(x, t) \geq h^0 > 0, \quad \text{pentru orice } (x, t) \in \bar{Q}. \quad (2.15)$$

Prima parte a acestei lucrări este dedicată studiului mai multor proprietăți ale anumitor probleme de autovalori, care vor fi esențiale în stabilirea rezultatelor principale ale acestui capitol.

Să considerăm următoarea problemă de autovalori:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) = -a(x, t)\varphi(x, t) + d_2 \Delta \varphi(x, t) \\ \quad + c_0 \varphi(x, t) \int_{\Omega} k(x', x) h^*(x', t) dx' \\ \quad + \lambda \varphi(x, t), & (x, t) \in (\Omega \setminus \bar{\omega}) \times (0, \infty), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n}(x, t) = 0, & (x, t) \in \partial \Omega \times (0, \infty), \\ \varphi(x, t) = 0, & (x, t) \in \partial \omega \times (0, \infty), \\ \varphi(x, t) = \varphi(x, t + T), & (x, t) \in (\Omega \setminus \bar{\omega}) \times (0, \infty). \end{array} \right. \quad (2.16)$$

Se poate observa mai întâi că problema (2.16) este un caz particular al următoarei probleme de autovalori

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) - \bar{a}(x, t)\varphi(x, t) - d_2 \Delta \varphi(x, t) = \lambda \varphi(x, t), & (x, t) \in (\Omega \setminus \bar{\omega}) \times (0, \infty), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n}(x, t) = 0, & (x, t) \in \partial \Omega \times (0, \infty), \\ \varphi(x, t) = 0, & (x, t) \in \partial \omega \times (0, \infty), \\ \varphi(x, t) = \varphi(x, t + T), & (x, t) \in (\Omega \setminus \bar{\omega}) \times (0, \infty), \end{array} \right. \quad (2.17)$$

unde $\bar{a}$ satisface regularitatea lui a din (A1). Într-adevăr $(x, t) \mapsto \int_{\Omega} k(x', x) h^*(x', t) dx'$ este o funcție T -periodică și de clasă C^1 pe $\bar{Q}$, și astfel obținem concluzia.

Pentru orice $\bar{a}$ de acest tip, problema (2.17) admite o *autovaloare principală* λ_1^ω și o autofuncție pozitivă corespunzătoare $\varphi_{1\omega}^*$.

Să subliniem că $\varphi_{1\omega}^*$ este, de asemenea, o soluție global regulată. Aceasta se întâmplă deoarece operatorul parabolic are un efect de regularizare, care asigură că soluția $\varphi_{1\omega}^*$ devine suficient de netedă (deoarece frontiera este suficient de netedă; pentru detalii, a se vedea [49, Section 7.2]). O altă abordare este de a observa că soluția asociată $\varphi_{1\omega}^*$ a problemei (2.17), corespunzătoare lui λ_1^ω , este o soluție global regulată, datorită [32, Corollary 24.4].

Teorema 2.6 Fie (h_0, p_0) care satisfac (A3), și presupunem că există m_1, m_2 două constante pozitive astfel încât

$$h_0(x) \geq m_1, \quad p_0(x) \geq m_2, \quad \text{a.p.t. } x \in \Omega.$$

Dacă există un control $u \in L_{loc}^\infty(\bar{Q})$, care acționează numai în $\bar{\omega}$ (numit control stabilizator), astfel încât (2.2) admite o unică soluție slabă cu componente nenegative și local esențial mărginite (în $\bar{Q}$) (h, p) și astfel încât

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(\cdot, t) = 0, \quad \text{în } L^\infty(\Omega), \quad (2.18)$$

atunci

$$\lambda_1^\omega \geq 0.$$

Teorema 2.7 Dacă $\lambda_1^\omega > 0$, atunci o condiție suficientă pentru eradicarea populației de prădători se obține printr-un control impulsiv u , adică soluția slabă (h, p) a lui (2.2), cu componente nenegative și local esențial mărginite în $\bar{Q}$, satisface (2.7).

3 Stabilizarea la zero a unei populații invazive de prădători într-un mediu sezonier: strategii alternative de control

În acest capitol vom investiga mai întâi posibilitatea de a eradica populația de prădători utilizând un control ce acționează în ω , cu o structură de recoltare simplă și ușor de implementat. Vom începe prin a considera un control aplicat numai populației de prădători, iar ulterior, vom studia un control care acționează exclusiv asupra populației pradă. Ne propunem să reducem prada în întreg domeniul Ω până la un nivel care nu mai poate susține prădătorii, utilizând un control care acționează în submulțimea ω . Suntem interesați în mod deosebit dacă eradicarea prădătorilor poate fi atinsă păstrând în același timp populația pradă.

În primul caz, a doua ecuație a sistemului (2.1) este modificată astfel

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t}(x, t) = & -a(x, t)p(x, t) + d_2 \Delta p(x, t) \\ & + c_0 p(x, t) \int_{\Omega} k(x', x) h(x', t) dx' - \gamma \Psi(x) \mathbb{1}_{\omega}(x) p(x, t), \end{aligned} \quad (3.1)$$

pentru $(x, t) \in Q$, unde $\mathbb{1}_{\omega}$ este funcția caracteristică a lui ω .

În al doilea caz, prima ecuație a sistemului (2.1) este modificată astfel

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t}(x, t) = & r(x, t)h(x, t) - g(x, t)h(x, t)^2 + d_1 \Delta h(x, t) \\ & - h(x, t) \int_{\Omega} k(x, x') p(x', t) dx' - \gamma \Psi(x) \mathbb{1}_{\omega}(x) h(x, t), \end{aligned} \quad (3.2)$$

pentru $(x, t) \in Q$.

Strategia noastră este de a reduce populația de prădători utilizând un control biliniar cu o structură simplă: fie $u := -\gamma \Psi p$, fie $u := -\gamma \Psi h$. Aici Ψ este o funcție astfel încât $\mathbb{1}_{\omega} \Psi \in C^1(\Omega)$ și $\gamma \in [0, \infty)$. Astfel $\gamma \Psi$ reprezintă rata de recoltare a populației de prădători, γ desemnează efortul de recoltare implementat, în timp ce Ψ reflectă eficacitatea recoltării, care poate depinde de morfologia habitatului.

De exemplu, putem considera Ψ astfel încât

$$\begin{cases} \Psi \in C^1(\Omega), \\ 1 \geq \Psi(x) > 0, & \text{pentru } x \in \omega, \\ \Psi(x) = 0, & \text{pentru } x \in \Omega \setminus \omega, \end{cases} \quad (3.3)$$

și astfel $\Psi(x) \mathbb{1}_{\omega}(x) = \Psi(x)$, pentru orice $x \in \Omega$. În particular, aceasta înseamnă că eficacitatea efortului de recoltare este 0 pe frontiera lui ω . Efectul intervenției nu este la fel de puternic în apropierea frontierei domeniului ω unde acționează controlul. De exemplu, să presupunem că o substanță toxică este folosită pentru a elimina indivizi din populația de prădători în interiorul lui ω , și este aplicată în centrul lui ω , unde efectul său este maxim (aplicarea acesteia în apropierea sau pe frontiera lui ω ar irosi o parte din potențialul ei, deoarece substanța acționează

numai în interiorul lui ω). Astfel, până când ajunge la frontiera domeniului, intensitatea sa se va fi diminuat în comparație cu punctul de aplicare, datorită, de exemplu, disipării sau prezenței unor surse de apă care o neutralizează complet. Ca rezultat, mai puțini indivizi sunt eliminați în apropierea frontierei, motiv pentru care funcția Ψ ia valori mai mici acolo.

Dacă un control $u(x, t)$ acționează în subregiunea spațială ω , utilizăm convenția că

$$\mathbb{1}_\omega(x)u(x, t) = 0, \quad \text{pentru } x \in \Omega \setminus \omega,$$

chiar dacă u nu este definit pentru $x \in \Omega \setminus \omega$.

În ambele cazuri, teorema de punct fix a lui Banach asigură faptul că sistemul (2.1) modificat fie ca în (3.1), fie ca în (3.2), admite o unică soluție slabă (h, p) cu componente nenegative, care sunt de asemenea local esențial mărginite în $\bar{Q}$.

Pe parcursul acestui capitol, presupunem că ipotezele (A1) - (A3) din Capitolul 2 au loc.

3.1 Eradicarea prădătorilor supuși unui control de tip recoltare

În această secțiune, investigăm eradicarea prădătorilor utilizând un control de tip recoltare care acționează asupra prădătorilor.

Pentru un $\gamma \geq 0$ fixat considerăm următorul *control feedback* de tip recoltare dat de

$$u(x, t) := -\gamma \Psi(x) p(x, t), \quad (x, t) \in Q, \quad (3.4)$$

unde Ψ satisface (3.3). Aici Ψ reprezintă eficacitatea efortului de recoltare pentru populația de prădători.

Sistemul pradă-prădător controlat devine

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t}(x, t) = r(x, t)h(x, t) - g(x, t)h(x, t)^2 + d_1 \Delta h(x, t) \\ \quad - h(x, t) \int_{\Omega} k(x, x') p(x', t) dx', \quad (x, t) \in Q, \\ \frac{\partial p}{\partial t}(x, t) = -a(x, t)p(x, t) + d_2 \Delta p(x, t) \\ \quad + c_0 p(x, t) \int_{\Omega} k(x', x) h(x', t) dx' - \gamma \Psi(x) p(x, t), \quad (x, t) \in Q, \\ \frac{\partial h}{\partial n}(x, t) = \frac{\partial p}{\partial n}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Sigma, \\ h(x, 0) = h_0(x), \quad p(x, 0) = p_0(x), \quad x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (3.5)$$

Fie (h, p) soluția slabă a lui (3.5) cu componente nenegative și local esențial mărginite în $\bar{Q}$.

Pentru $\varepsilon > 0$ și $\gamma \geq 0$ arbitrari, dar fixați, considerăm următoarea problemă de autovalori

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) = -a(x, t)\varphi(x, t) + d_2 \Delta \varphi(x, t) - \gamma \Psi(x) \varphi(x, t) \\ \quad + c_0 \varphi(x, t) \left[\int_{\Omega} k(x', x) h^*(x', t) dx' + \varepsilon \right] + \lambda \varphi(x, t), \quad (x, t) \in Q, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Sigma, \\ \varphi(x, t) = \varphi(x, t + T), \quad (x, t) \in Q, \end{array} \right. \quad (3.6)$$

unde h^* este definit în Capitolul 2.

Se poate observa mai întâi că problema (3.6) este un caz particular al următoarei probleme de autovalori

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) = -\bar{a}(x, t)\varphi(x, t) + d_2 \Delta \varphi(x, t) + \lambda \varphi(x, t), \quad (x, t) \in Q, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Sigma, \\ \varphi(x, t) = \varphi(x, t + T), \quad (x, t) \in Q, \end{array} \right. \quad (3.7)$$

unde $\bar{a}$ satisface regularitatea lui a din (A1). Într-adevăr $(x, t) \mapsto \int_{\Omega} k(x', x) h^*(x', t) dx'$ și $(x, t) \mapsto \gamma \Psi(x)$ sunt amândouă funcții de clasă C^1 pe $\bar{Q}$ și astfel obținem concluzia.

Pentru orice astfel de $\bar{a}$, problema (3.7) admite o autovaloare principală λ_1 și o autofuncție pozitivă corespunzătoare φ_1^* (care este global regulată; a se vedea [36]) care satisface

$$\varphi_1^*(x, t) \geq m_0 > 0, \quad \text{pentru orice } (x, t) \in \bar{Q}. \quad (3.8)$$

Nicio altă autovaloare nu admite o soluție pozitivă.

Existența și unicitatea autovalorii principale și a unei autofuncții pozitive corespunzătoare pentru (3.7) a fost demonstrată în [32].

Fie $\lambda_1^{\gamma, \varepsilon}$ autovaloarea principală pentru (3.6). Este evident că $\lambda_1^{\gamma, \varepsilon} = \lambda_1^{\gamma} - c_0 \varepsilon$ (unde folosim notația simplificată λ_1^{γ} pentru $\lambda_1^{\gamma, 0}$). Fie $\varphi_1^{\gamma, \varepsilon}$ (notată în cele ce urmează prin φ_{γ}^*) o autofuncție pozitivă pentru (3.6) corespunzătoare lui $\lambda_1^{\gamma, \varepsilon}$. Este evident că $\varphi_1^{\gamma, 0}$ este o autofuncție pentru (3.6) corespunzătoare lui $\varepsilon = 0$ și autovalorii $\lambda_1^{\gamma, 0}$.

Semnul autovalorii principale λ_1^{γ} va prezenta un interes deosebit în investigarea eradicării prădătorilor.

Teorema 3.1 *Dacă $\lambda_1^{\gamma} > 0$, atunci o condiție suficientă pentru eradicarea populației de prădători se obține prin controlul feedback u dat de (3.4), adică soluția slabă (h, p) a lui (3.5) cu componente nenegative și local esențial mărginite în $\bar{Q}$ satisface (2.7).*

Să spunem câteva cuvinte despre o **condiție necesară** pentru eradicarea prădătorilor. Pentru un $\varepsilon > 0$ suficient de mic, arbitrar dar fixat, și $\gamma \geq 0$, considerăm următoarea problemă de autovalori

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) = -a(x, t)\varphi(x, t) + d_2 \Delta \varphi(x, t) - \gamma \Psi(x)\varphi(x, t) \\ \quad + c_0 \varphi(x, t) \left[\int_{\Omega} k(x', x) h^*(x', t) dx' \right. \\ \quad \left. - \varepsilon \|k\|_{L^\infty(\Omega \times \Omega)} (\|h^*\|_{L^\infty(Q)} + 1) m(\Omega) \right] + \lambda \varphi(x, t), \quad (x, t) \in Q, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Sigma, \\ \varphi(x, t) = \varphi(x, t + T), \quad (x, t) \in Q. \end{array} \right. \quad (3.9)$$

Fie

$$\tilde{\lambda}_1^{\gamma, \varepsilon} = \lambda_1^\gamma + c_0 \varepsilon \|k\|_{L^\infty(\Omega \times \Omega)} (\|h^*\|_{L^\infty(Q)} + 1) m(\Omega)$$

autovaloarea principală pentru (3.9) și $\varphi_1^{\gamma, 0}$ o autofuncție pozitivă corespunzătoare pentru (3.6), cu $\varepsilon = 0$.

Teorema 3.2 Fie (h_0, p_0) care satisfac (A3), și presupunem că există m_1, m_2 două constante pozitive astfel încât

$$h_0(x) \geq m_1, \quad p_0(x) \geq m_2, \quad \text{a.p.t. } x \in \Omega \quad (3.10)$$

și fie (h, p) unica soluție slabă a lui (2.2) cu componente nenegative și local esențial mărginite în $\bar{Q}$, corespunzătoare controlului feedback u dat de (3.4). Dacă

$$p(\cdot, t) \rightarrow 0 \quad \text{în } L^\infty(\Omega), \quad \text{pentru } t \rightarrow \infty, \quad (3.11)$$

atunci

$$\lambda_1^\gamma \geq 0.$$

3.2 Eradicarea prădătorilor printr-un control de tip recoltare aplicat asupra prăzii

În această secțiune, investigăm eradicarea prădătorilor utilizând un control de tip recoltare care acționează asupra prăzii. Abordarea se concentrează pe reducerea populației pradă până la un nivel care nu mai poate susține populația de prădători.

Presupunem că există o constantă pozitivă m_1 astfel încât

$$h_0(x) \geq m_1, \quad \text{a.p.t. } x \in \Omega. \quad (3.12)$$

Pentru un $\gamma \geq 0$ fixat, considerăm controlul feedback de tip recoltare dat de

$$u(x, t) := -\gamma \Psi(x) h(x, t), \quad \text{pentru } (x, t) \in Q,$$

unde Ψ satisface (3.3).

Folosim același simbol Ψ ca în Secțiunea 3.1, dar aici acesta reprezintă eficacitatea efortului de recoltare pentru populația pradă.

Sistemul pradă-prădător controlat devine

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t}(x, t) = r(x, t)h(x, t) - g(x, t)h(x, t)^2 + d_1 \Delta h(x, t) \\ \quad - h(x, t) \int_{\Omega} k(x, x')p(x', t)dx' - \gamma \Psi(x) h(x, t), \quad (x, t) \in Q, \\ \frac{\partial p}{\partial t}(x, t) = -a(x, t)p(x, t) + d_2 \Delta p(x, t) \\ \quad + c_0 p(x, t) \int_{\Omega} k(x', x)h(x', t)dx', \quad (x, t) \in Q, \\ \frac{\partial h}{\partial n}(x, t) = \frac{\partial p}{\partial n}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Sigma, \\ h(x, 0) = h_0(x), \quad p(x, 0) = p_0(x), \quad x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (3.13)$$

Fie (h, p) soluția slabă a lui (3.13) cu componente nenegative și local esențial mărginite în $\bar{Q}$.

Fie $\bar{h}_\gamma$ soluția slabă nenegativă și local esențial mărginită în $\bar{Q}$ a următoarei ecuații parabolice

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{h}}{\partial t}(x, t) = r(x, t)\bar{h}(x, t) - g(x, t)\bar{h}(x, t)^2 + d_1 \Delta \bar{h}(x, t) \\ \quad - \gamma \Psi(x) \bar{h}(x, t), \quad (x, t) \in Q, \\ \frac{\partial \bar{h}}{\partial n}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Sigma, \\ \bar{h}(x, 0) = \|h_0\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad (x, t) \in Q. \end{array} \right. \quad (3.14)$$

Principiul de comparație pentru ecuații parabolice implică faptul că

$$0 \leq h(x, t) \leq \bar{h}_\gamma(x, t), \quad \text{a.p.t. } x \in \Omega, \text{ pentru orice } t \geq 0. \quad (3.15)$$

Să considerăm următoarea problemă de autovalori asociată problemei parabolice (3.14), dată de

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \zeta}{\partial t}(x, t) = r(x, t)\zeta(x, t) + d_1 \Delta \zeta(x, t) - \gamma \Psi(x) \zeta(x, t) + \mu \zeta(x, t), \quad (x, t) \in Q, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial n}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Sigma, \\ \zeta(x, t) = \zeta(x, t + T), \quad (x, t) \in Q \end{array} \right. \quad (3.16)$$

și fie μ_1^γ autovaloarea principală pentru (3.16).

Dacă $\mu_1^\gamma < 0$, atunci, aplicând punctul (i_3) din Teorema 5.6 problemei (3.14),

rezultă că există o unică soluție global regulată, netrivială, pozitivă, h_γ^* pentru

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h^*}{\partial t}(x, t) = r(x, t)h^*(x, t) - g(x, t)h^*(x, t)^2 \\ \quad + d_1 \Delta h^*(x, t) - \gamma \Psi(x) h^*(x, t), \quad (x, t) \in Q, \\ \frac{\partial h^*}{\partial n}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Sigma, \\ h^*(x, t) = h^*(x, t + T), \quad (x, t) \in Q, \end{array} \right. \quad (3.17)$$

care satisface

$$\bar{h}_\gamma(\cdot, t) - h_\gamma^*(\cdot, t) \rightarrow 0, \quad \text{în } C(\bar{\Omega}), \text{ pentru } t \rightarrow \infty. \quad (3.18)$$

Dacă $\mu_1^\gamma \geq 0$, atunci, aplicând punctul (i_1) din Teorema 5.6 problemei (3.14), rezultă că

$$\bar{h}_\gamma(\cdot, t) \rightarrow 0, \quad \text{în } C(\bar{\Omega}), \text{ pentru } t \rightarrow \infty. \quad (3.19)$$

Să considerăm în continuare cazul în care $\mu_1^\gamma \geq 0$. Atunci, din (3.19) avem că, pentru orice $\varepsilon > 0$, există un $\bar{t}(\varepsilon) \geq 0$ astfel încât

$$0 \leq h(x, t) \leq \bar{h}_\gamma(x, t) \leq \varepsilon, \quad \text{a.p.t. } x \in \Omega, \text{ pentru orice } t \geq \bar{t}(\varepsilon) \quad (3.20)$$

și obținem:

$$0 \leq p(x, t) \leq \bar{p}_\varepsilon(x, t), \quad \text{a.p.t. } x \in \Omega, \text{ pentru orice } t \geq \bar{t}(\varepsilon),$$

unde $\bar{p}_\varepsilon$ este unica soluție slabă pentru

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{p}}{\partial t}(x, t) = -a(x, t)\bar{p}(x, t) + d_2 \Delta \bar{p}(x, t) \\ \quad + c_0 \varepsilon \|k\|_{L^\infty(\Omega \times \Omega)} m(\Omega) \bar{p}(x, t), \quad x \in \Omega, t > \bar{t}(\varepsilon), \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial n}(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, t > \bar{t}(\varepsilon), \\ \bar{p}(x, \bar{t}(\varepsilon)) = \|p(\cdot, \bar{t}(\varepsilon))\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (3.21)$$

Să considerăm următoarea problemă de autovalori asociată problemei parabolice (3.21), dată de

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \zeta}{\partial t}(x, t) = -a(x, t)\zeta(x, t) + d_2 \Delta \zeta(x, t) \\ \quad + c_0 \varepsilon \|k\|_{L^\infty(\Omega \times \Omega)} m(\Omega) \zeta(x, t) + \nu \zeta(x, t), \quad (x, t) \in Q, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial n}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Sigma, \\ \zeta(x, t) = \zeta(x, t + T), \quad (x, t) \in Q. \end{array} \right. \quad (3.22)$$

Putem concluziona că, dacă autovaloarea principală ν_1^ε pentru (3.22) este pozitivă, atunci, aplicând punctul (i_2) din Teorema 5.6 problemei (3.21), rezultă că

$$\bar{p}_\varepsilon(\cdot, t) \rightarrow 0, \quad \text{în } C(\bar{\Omega}), \text{ pentru } t \rightarrow \infty \quad (3.23)$$

și, prin urmare,

$$p(\cdot, t) \rightarrow 0 \quad \text{în } L^\infty(\Omega), \text{ pentru } t \rightarrow \infty. \quad (3.24)$$

Utilizând principiul de comparație pentru ecuații parabolice, rezultă că populația de prădători scade la 0 cu rata $e^{-\nu_1^\varepsilon t}$. Într-adevăr, avem că

$$0 \leq p(x, t) \leq z(x, t), \quad \text{a.p.t. } x \in \bar{\Omega} \text{ și pentru orice } t \geq \bar{t}(\varepsilon),$$

unde $z(x, t) := C\zeta_1^\varepsilon(x, t)e^{-\nu_1^\varepsilon(t-\bar{t}(\varepsilon))}$, pentru $(x, t) \in \bar{\Omega} \times [\bar{t}(\varepsilon), \infty)$, și ζ_1^ε este o autofuncție pozitivă corespunzătoare lui ν_1^ε și problemei de autovalori (3.22). Aici $\|p(\cdot, \bar{t}(\varepsilon))\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\zeta_1^\varepsilon(x, \bar{t}(\varepsilon))$ și C este o constantă pozitivă. Autofuncția ζ_1^ε este T -periodică, deci mărginită, și obținem că populația de prădători scade la 0 cu o rată exponențială.

Este evident că

$$\nu_1^\varepsilon + c_0\varepsilon \|k\|_{L^\infty(\Omega \times \Omega)} m(\Omega) = \nu_1^0,$$

unde ν_1^0 este autovaloarea principală corespunzătoare problemei (3.22) și lui $\varepsilon = 0$, ceea ce ne conduce la următorul rezultat.

Teorema 3.3 *Dacă $\mu_1^\gamma \geq 0$ și $\nu_1^0 > 0$, atunci*

$$p(\cdot, t) \rightarrow 0, \quad \text{în } L^\infty(\Omega), \text{ pentru } t \rightarrow \infty$$

(cel puțin la fel de rapid ca $e^{-\nu_1^\varepsilon t}$, pentru orice $\varepsilon > 0$).

Remarca 3.4 Dacă a satisface în plus că

$$a(x, t) \geq a_0, \quad \text{pentru orice } (x, t) \in Q,$$

unde a_0 este o constantă pozitivă, atunci $\nu_1^0 \geq a_0$.

Dezavantajul acestui control este că elimină atât populația de prădători, cât și populația pradă. Dacă dorim ca populația pradă să persiste, este necesar să implementăm un control mai puțin drastic, ceea ce înseamnă utilizarea unui γ mai mic.

Să considerăm acum cazul în care $\mu_1^\gamma < 0$. Atunci, din (3.18), obținem că pentru orice $\varepsilon > 0$, există un $\bar{t}(\varepsilon) \geq 0$ astfel încât

$$0 \leq h(x, t) \leq h_\gamma^*(x, t) + \varepsilon, \quad \text{a.p.t. } x \in \Omega, \text{ pentru orice } t \geq \bar{t}(\varepsilon)$$

și, prin urmare (prin principiul de comparație),

$$0 \leq p(x, t) \leq \bar{p}_{\gamma\varepsilon}(x, t), \quad \text{a.p.t. } x \in \Omega, \text{ pentru orice } t \geq \bar{t}(\varepsilon),$$

unde $\bar{p}_{\gamma\varepsilon}$ este unica soluție slabă pentru

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{p}}{\partial t}(x, t) = -a(x, t)\bar{p}(x, t) + d_2 \Delta \bar{p}(x, t) \\ \quad + c_0 \varepsilon \|k\|_{L^\infty(\Omega \times \Omega)} m(\Omega) \bar{p}(x, t) \\ \quad + c_0 \left(\int_{\Omega} k(x', x) h_{\gamma}^*(x', t) dx' \right) \bar{p}(x, t), \quad x \in \Omega, t > \bar{t}(\varepsilon), \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial n}(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, t > \bar{t}(\varepsilon), \\ \bar{p}(x, \bar{t}(\varepsilon)) = \|p(\cdot, \bar{t}(\varepsilon))\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (3.25)$$

Să considerăm următoarea problemă de autovalori asociată problemei parabolice (3.25), dată de

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \theta}{\partial t}(x, t) = -a(x, t)\theta(x, t) + d_2 \Delta \theta(x, t) \\ \quad + c_0 \varepsilon \|k\|_{L^\infty(\Omega \times \Omega)} m(\Omega) \theta(x, t) \\ \quad + c_0 \left(\int_{\Omega} k(x', x) h_{\gamma}^*(x', t) dx' \right) \theta(x, t) + \rho \theta(x, t), \quad (x, t) \in Q, \\ \frac{\partial \theta}{\partial n}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Sigma, \\ \theta(x, t) = \theta(x, t + T), \quad (x, t) \in Q. \end{array} \right. \quad (3.26)$$

Putem concluziona că, dacă autovaloarea principală $\rho_{1\gamma}^\varepsilon$ pentru (3.26) este pozitivă, atunci, prin aplicarea punctului (i_2) din Teorema 5.6 problemei (3.25), rezultă că

$$\bar{p}_{\gamma\varepsilon}(\cdot, t) \rightarrow 0 \quad \text{în } C(\bar{\Omega}), \text{ pentru } t \rightarrow \infty$$

și, prin urmare,

$$p(\cdot, t) \rightarrow 0 \quad \text{în } L^\infty(\Omega), \text{ pentru } t \rightarrow \infty.$$

Utilizând principiul de comparație pentru ecuații parabolice, rezultă că populația de prădători scade cu o rată de $e^{-\rho_{1\gamma}^\varepsilon t}$. Într-adevăr, avem că

$$0 \leq p(x, t) \leq z(x, t), \quad \text{a.p.t. } x \in \bar{\Omega} \text{ și } t \geq \bar{t}(\varepsilon),$$

unde $z(x, t) := C\theta_1^\varepsilon(x, t)e^{-\rho_{1\gamma}^\varepsilon(t-\bar{t}(\varepsilon))}$, pentru $(x, t) \in \bar{\Omega} \times [\bar{t}(\varepsilon), \infty)$, și θ_1^ε este o autofuncție pozitivă corespunzătoare lui $\rho_{1\gamma}^\varepsilon$ și problemei de autovalori (3.26). Aici $\|p(\cdot, \bar{t}(\varepsilon))\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\theta_1^\varepsilon(x, \bar{t}(\varepsilon))$ și C este o constantă pozitivă. Autofuncția θ_1^ε este T -periodică, deci mărginită, și obținem că populația de prădători scade la 0 cu o rată exponențială.

Este evident că

$$\rho_{1\gamma}^\varepsilon + c_0 \varepsilon \|k\|_{L^\infty(\Omega \times \Omega)} m(\Omega) = \rho_{1\gamma}^0,$$

unde $\rho_{1\gamma}^0$ este autovaloarea principală corespunzătoare problemei (3.26) și lui $\varepsilon = 0$, ceea ce ne conduce la următorul rezultat.

Teorema 3.5 Dacă $\mu_1^\gamma < 0$ și $\rho_{1\gamma}^0 > 0$, atunci

$$p(\cdot, t) \rightarrow 0 \quad \text{în } L^\infty(\Omega), \text{ pentru } t \rightarrow \infty$$

(cel puțin la fel de rapid ca $e^{-\rho_{1\gamma}^\varepsilon t}$, pentru orice $\varepsilon > 0$).

Remarca 3.6 Atunci când p este densitatea unei populații străine dăunătoare, iar h este densitatea unei populații ce trebuie protejată, o abordare eficientă este de a diminua prada printr-un efort de recoltare până la un nivel care nu mai poate susține prădătorii.

Ca o consecință a argumentelor pentru Teorema 3.5, este de asemenea important de remarcat că se poate demonstra că, în ipotezele din Teorema 3.5, **populația pradă nu este eradicată**.

Remarca 3.7 Presupunem că rata a satisface, în plus, că există o constantă pozitivă a_0 astfel încât $a(x, t) \geq a_0$, pentru orice $(x, t) \in \bar{Q}$ (în acest caz rezultă, prin Remarca 3.4, că $\nu_1^0 \geq a_0 > 0$).

Vom folosi următorul rezultat tehnic:

Lema 3.8 Fie μ_1^γ autovaloarea principală pentru (3.16).

$$\text{Dacă } 0 < \gamma_1 < \gamma_2, \quad \text{atunci } \mu_1^{\gamma_1} < \mu_1^{\gamma_2}.$$

Așadar aplicația $[0, \infty) \ni \gamma \mapsto \mu_1^\gamma$ este strict crescătoare.

Cazul 1.1 Să presupunem că ne aflăm în cazul $\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \mu_1^\gamma > 0$.

Pe de altă parte, prin ipoteza (2.4) rezultă că $\mu_1^0 < 0$. Prin urmare există $\gamma_2^* \in (0, \infty]$ astfel încât

$$\mu_1^\gamma < 0, \quad \text{pentru orice } \gamma \in [0, \gamma_2^*)$$

și

$$\mu_1^\gamma > 0, \quad \text{pentru orice } \gamma \in [\gamma_2^*, \infty).$$

Cazul 1.2 Să presupunem că ne aflăm în cazul $\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \mu_1^\gamma \leq 0$, caz în care (γ_2^* devine ∞)

$$\mu_1^\gamma < 0, \quad \text{pentru orice } \gamma \in [0, \infty).$$

Vom folosi următoarele rezultate tehnice:

Lema 3.9 Pentru orice $0 \leq \gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_2^*$, avem că

$$h_{\gamma_1}^*(x, t) \geq h_{\gamma_2}^*(x, t), \quad \text{pentru orice } x \in \Omega \text{ și pentru orice } t > 0. \quad (3.27)$$

În plus, inegalitatea (3.27) este strictă.

Lema 3.10 Fie $\rho_{1\gamma}^0$ autovaloarea principală pentru (3.26) corespunzătoare lui $\varepsilon = 0$.

$$\text{Dacă } 0 < \gamma_1 < \gamma_2, \text{ atunci } \rho_{1\gamma_1}^0 \leq \rho_{1\gamma_2}^0.$$

Așadar, aplicația $\gamma \mapsto h_\gamma^*$ este descrescătoare pentru $\gamma \in [0, \gamma_2^*)$ (din Lema 3.9) și, prin urmare, din Lema 3.10 și demonstrația sa, obținem că $\gamma \mapsto \rho_{1\gamma}^0$ este crescătoare pe $[0, \gamma_2^*)$. Să observăm că funcția $\gamma \mapsto h_\gamma^*$ este descrescătoare numai pentru $\gamma \in [0, \gamma_2^*)$ deoarece, numai pentru acest tip de γ avem că $\mu_1^\gamma < 0$ și numai atunci putem folosi punctul (i_3) din Teorema 5.6 pentru a obține existența lui h_γ^* (soluția lui (3.17), care este o funcție strict pozitivă).

Dacă $\gamma_2^* < \infty$, atunci rezultă că $\rho_{1\gamma_2^*}^0 > 0$. Într-adevăr, prin alegerea lui γ_2^* avem că $\mu_1^{\gamma_2^*} > 0$, și din Remarca 3.4 rezultă că $\nu_1^0 > 0$. Să considerăm acum $h_{\gamma_2^*}^* \equiv 0$ în demonstrația Teoremei 3.3, ceea ce ne dă $\bar{h}(\cdot, t) \rightarrow 0$, în $L^\infty(\Omega)$, pentru $t \rightarrow \infty$. Definim atunci $\rho_{1\gamma_2^*}^0$ ca fiind soluția lui (3.26). Observăm că, în acest caz limită, (3.26) coincide cu (3.22), ceea ce implică faptul că $\rho_{1\gamma_2^*}^0 \equiv \nu_1^0$. Prin urmare, ecuația (3.26), corespunzătoare lui $\rho_{1\gamma}^0$, are sens pentru orice funcție h_γ^* , inclusiv $h_\gamma^* \equiv 0$, pentru care ν_1^0 coincide cu $\rho_{1\gamma}^0$.

Cazul 2.1 Să presupunem că ne aflăm în cazul $\rho_{10}^0 \leq 0$, atunci există $\gamma_1^* \in [0, \gamma_2^*)$ astfel încât

$$\rho_{1\gamma}^0 \leq 0, \quad \text{pentru orice } \gamma \in [0, \gamma_1^*]$$

și

$$\rho_{1\gamma}^0 > 0, \quad \text{pentru orice } \gamma \in (\gamma_1^*, \gamma_2^*].$$

Cazul 2.2 Să presupunem că ne aflăm în cazul $\rho_{10}^0 > 0$, caz în care $(\gamma_1^*$ devine 0)

$$\rho_{1\gamma}^0 > 0, \quad \text{pentru orice } \gamma \in [0, \gamma_2^*].$$

Putem concluziona că, pentru $u := -\gamma\Psi h$ obținem că (dacă $\gamma_2^* < \infty$, și $h_0 \geq m_1 > 0$, $p_0(x) \geq m_2 > 0$ a.p.t. $x \in \Omega$):

- Dacă $\gamma > \gamma_2^*$ (ceea ce înseamnă că eliminăm prea mulți indivizi din populația pradă), atunci $\mu_1^\gamma > 0$ și $\nu_1^0 > 0$. Prin urmare, utilizând Teorema 3.3, avem că $p(\cdot, t) \rightarrow 0$ și $h(\cdot, t) \rightarrow 0$, în $L^\infty(\Omega)$, pentru $t \rightarrow \infty$, adică **atât populația de prădători cât și populația pradă sunt eradicate**;
- Dacă $\gamma \in (\gamma_1^*, \gamma_2^*)$, atunci $\mu_1^\gamma < 0$ și $\rho_{1\gamma}^0 > 0$. Prin urmare, utilizând Teorema 3.5, avem că $p(\cdot, t) \rightarrow 0$ și $h(\cdot, t) \rightarrow 0$, în $L^\infty(\Omega)$ (și de asemenea $h(\cdot, t) \rightarrow 0$ în $L^1(\Omega)$), pentru $t \rightarrow \infty$, adică **populația de prădători este eradicată iar populația pradă persistă** (aici “persistență” se referă la faptul că numărul total de indivizi din populația pradă la momentul t , dat de $\int_\Omega h(x, t) dx$, nu converge la 0 pentru $t \rightarrow \infty$);

4 Stabilizarea la zero a unei populații de dăunători prin intermediul unui prădător într-un mediu sezonier

4.1 Formularea problemei

Examinăm aici un sistem de tip reacție-difuzie care surprinde interacțiunea dintre două populații, pradă și prădător, ambele deplasându-se liber în habitatul $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \in \{2, 3\}$, Ω fiind un domeniu mărginit cu frontieră de clasă C^∞ . Modelul include un control biologic aplicat prăzii, într-o subregiune specifică $\omega \subset \Omega$, unde ω este o mulțime deschisă cu frontieră de clasă C^∞ astfel încât $\omega \subset\subset \Omega$. Sistemul controlat avut în vedere este

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t}(x, t) = r(x, t)h(x, t) - g(x, t)h(x, t)^2 + d_1 \Delta h(x, t) \\ \quad - h(x, t) \int_{\Omega} k(x, x')p(x', t)dx', \quad (x, t) \in Q, \\ \frac{\partial p}{\partial t}(x, t) = -a(x, t)p(x, t) - \tilde{g}(x, t)p(x, t)^2 + d_2 \Delta p(x, t) \\ \quad + c_0 h(x, t) \int_{\Omega} k(x, x')p(x', t)dx' + u(x, t), \quad (x, t) \in Q, \\ \frac{\partial h}{\partial n}(x, t) = \frac{\partial p}{\partial n}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Sigma, \\ h(x, 0) = h_0(x), \quad p(x, 0) = p_0(x), \quad x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Scopul nostru principal este de a studia eradicarea populației dăunătoare h (care joacă rolul prăzii) printr-o strategie specifică de infuzie de prădători u , care acționează în ω . Mai precis, ne propunem să obținem că

$$h(\cdot, t) \longrightarrow 0 \quad \text{în } L^\infty(\Omega), \text{ pentru } t \rightarrow \infty,$$

unde (h, p) este soluția lui (4.1).

Pentru a susține acest obiectiv de eradicare, prezentăm condiții de optimalitate necesare și suficiente, arătând că eradicarea depinde de semnul autovalorilor principale ale anumitor operatori parabolici. Acești operatori apar în probleme de autovalori precum (4.3) (a se vedea mai jos). Strategia noastră pentru reducerea populației pradă (sau dăunătoare) h implică un control bilinear aplicat prădătorilor, dat de

$$u := \gamma \Psi p. \quad (4.2)$$

Aici $\gamma \in [0, \infty)$ reprezintă un control ce acționează ca o rată de creștere a prădătorilor (un efort de infuzie), în timp ce Ψ este o rată de eficacitate influențată de morfologia habitatului, care nu are niciun efect odată ce părăsim subregiunea ω (a se vedea (A7) mai jos). Cu alte cuvinte, γ reprezintă magnitudinea intervenției, iar Ψ reprezintă efectul acestei intervenții. Așadar $\gamma \Psi$ definește rata de infuzie a prădătorilor.

Dacă o funcție v acționează în subregiunea spațială ω , folosim convenția că $\mathbb{1}_\omega(x) v(x, t) = 0$, pentru $x \in \Omega \setminus \omega$, chiar dacă v nu este definită pentru $x \in \Omega \setminus \omega$.

Dacă considerăm un astfel de control u , atunci existența și unicitatea unei soluții slabe (h, p) pentru (4.1), cu componente nenegative și local esențial mărginite în $\bar{Q}$, este stabilită, în principal, utilizând teorema de punct fix a lui Banach, urmând pași similari celor din Lema 2.5 (pe $\bar{\Omega} \times [0, \tilde{T}]$).

Definiția 4.1 Fie $\tilde{T} > 0$. Spunem că (h, p) este o soluție slabă pentru (4.1), dacă:

$$(i) \quad h, p \in L^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega)) \cap W^{1,2}(0, \tilde{T}; (H^1(\Omega))^*) \cap AC((0, \tilde{T}]; L^2(\Omega)) \\ \cap L^2_{loc}((0, \tilde{T}]; H^2(\Omega));$$

$$(ii) \quad a.p.t. \quad x \in \Omega \text{ și pentru orice } t \in (0, \tilde{T}):$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}(x, t) = r(x, t)h(x, t) - g(x, t)h(x, t)^2 + d_1 \Delta h(x, t) \\ - h(x, t) \int_{\Omega} k(x, x')p(x', t)dx'$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}(x, t) = -a(x, t)p(x, t) - \tilde{g}(x, t)p(x, t)^2 + d_2 \Delta p(x, t) \\ + c_0 h(x, t) \int_{\Omega} k(x, x')p(x', t)dx' + u(x, t)$$

$$(iii) \quad \frac{\partial h}{\partial n}(x, t) = \frac{\partial p}{\partial n}(x, t) = 0, \quad a.p.t. \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, \tilde{T});$$

$$(iv) \quad h(x, 0) = h_0(x), p(x, 0) = p_0(x), a.p.t. \quad x \in \Omega;$$

Dacă (h, p) este o soluție slabă pentru (4.1) pentru orice $\tilde{T} > 0$ (pe $\bar{\Omega} \times [0, \tilde{T}]$), atunci spunem că (h, p) este o soluție slabă a lui (4.1) pentru $\tilde{T} := \infty$.

După cunoștințele noastre, toată literatura citată (cu excepția lui [5]) se concentrează pe rate independente de timp (sau independente de spațiu). Având în vedere că dinamica sistemelor pradă-prădător prezintă în mod natural variații sezoniere (prin ratele $r, g, \tilde{g}, a$), este rezonabil să impunem ca aceste rate să fie periodice în timp (și dependente de spațiu).

Să examinăm acum **principalele diferențe** dintre această abordare din acest capitol și studiile anterioare.

În primul rând, în acest capitol, ne propunem să studiem eradicarea (a se vedea analiza analoagă din Capitolul 2 și Capitolul 3) a unei populații dăunătoare care acționează acum ca pradă. Astfel, o primă noutate este că, în acest cadru, **prada este o specie dăunătoare toxică** pe care căutăm să o eliminăm prin introducerea unui prădător care să o consume. Distincția principală față de Capitolele 2 și 3 este obiectivul nostru: aici, ne propunem să conducem prada spre extincție, în timp ce în capitolele menționate anterior, obiectivul era păstrarea prăzii. În esență, fosta pradă funcționează acum ca un prădător al unei a treia populații, ceea ce înseamnă că lucrăm cu două populații de prădători în loc de un sistem tradițional

pradă-prădător (populația afectată nu este inclusă în modelul nostru). Populația dăunătoare vizată pentru eradicare poate fi în continuare numită "pradă".

Este important de remarcat că rolurile prădătorului și prăzii din Capitolele 2 și 3 nu pot fi pur și simplu inversate (astfel încât prădătorul să devină pradă) pentru a se potrivi noului nostru model. În capitolele menționate anterior, obiectivul era păstrarea lui h în timp ce se eradica p , în timp ce în modelul prezentat de (4.1), ne concentrăm exclusiv pe eradicarea lui h , fără a ne preocupa de soarta lui p . De fapt, dacă p este un prădător specializat care depinde în întregime de h pentru supraviețuire, atunci eradicarea lui h implică extincția lui p .

Aceasta ne conduce la **a doua diferență cheie**, și anume utilizarea unui **control de tip infuzie**. În Capitolele 2 și 3, dar și în [11], strategia de control era de tip recoltare, prin care o cantitate din populația de prădători era îndepărtată, proporțional cu densitatea sa, dintr-o subregiune specifică ω . Aici, strategia de control implică introducerea de prădători. Aceasta înseamnă că adăugăm indivizi din populația de prădători într-o subregiune specifică ω pentru a eradica populația dăunătoare, care joacă acum rolul prăzii.

În al treilea rând, similar Capitolelor 2 și 3, dar și lucrării [11], problema (4.1) implică, de asemenea, un operator nelocal ce descrie prădarea, și anume $h(x, t) \int_{\Omega} k(x, x') p(x', t) dx'$. Acesta reprezintă densitatea populației pradă capturată în punctul x la momentul t , care este apoi transformată în biomasă printr-o rată de conversie $c_0 > 0$. Totuși, spre deosebire de conținutul prezentat în Capitolele 2 și 3, aici **prădătorii urmăresc prada**, adică se deplasează dintr-un punct x' pentru a captura o pradă aflată în punctul x , și nu se întorc în poziția lor inițială. Să observăm că în Capitolele 2 și 3, prădătorii aflați inițial în punctul x' , după prădarea în punctul x , se întorc la locația lor inițială x' .

Termenii $h(x, t)$ și $p(x, t)$ reprezintă densitățile populațiilor de pradă (dăunătoare) și de prădători, într-un punct x la momentul t , în timp ce $h_0(x)$ și $p_0(x)$ desemnează densitățile inițiale ale populațiilor de pradă și de prădători într-un punct $x \in \Omega$.

Ca de obicei, operatorul Laplace modelează dispersia aleatoare a ambelor populații în habitatul lor Ω . Condițiile la frontieră de tip Neumann omogen reflectă ipoteza că nu există flux al indivizilor prin frontiera habitatului. Coeficienții de difuzie, d_1 și d_2 , sunt considerați a fi constante pozitive. Ratele $r, a, g, \tilde{g}$ sunt considerate dependente de timp și periodice, cu o perioadă T de un an. Coeficienții din (4.1) au următoarele semnificații:

- $r(x, t)$ reprezintă rata naturală de creștere a populației pradă;
- $a(x, t)$ reprezintă rata naturală de descreștere a populației de prădători (care corespunde prădătorilor specializați, atunci când a este pozitivă peste tot);
- $g(x, t)$ reprezintă coeficientul termenului logistic (gh^2) pentru populația pradă;
- $\tilde{g}(x, t)$ reprezintă coeficientul termenului logistic ($\tilde{g}p^2$) pentru populația de prădători;

- $k(x, x')$ reprezintă rata cu care o pradă aflată în punctul x este capturată de un prădător aflat în punctul x' .

În cele ce urmează vom lucra în următoarele ipoteze:

(A1) $a \in C^1(\bar{Q})$ și există $T \in (0, \infty)$ astfel încât $a(x, t + T) = a(x, t)$, pentru orice $(x, t) \in \bar{Q}$;

(A2) $r \in C^1(\bar{Q})$ și $r(x, t + T) = r(x, t)$, pentru orice $(x, t) \in \bar{Q}$;

(A3) există $r_0 \in C([0, \infty))$ și $r_0(t + T) = r_0(t)$, pentru orice $t \geq 0$, și

$$\begin{cases} r(x, t) \geq r_0(t), & \text{pentru orice } (x, t) \in \bar{Q}, \\ \int_0^T r_0(t) dt > 0 \end{cases}$$

(faptul că integrala lui r_0 pe o perioadă de timp T rămâne pozitivă înseamnă că populația pradă persistă în absența prădătorilor);

(A4) $g, \tilde{g} \in C^1(\bar{Q})$ și $g(x, t + T) = g(x, t)$, $\tilde{g}(x, t + T) = \tilde{g}(x, t)$, pentru orice $(x, t) \in \bar{Q}$, și există $\rho_0, \tilde{\gamma}_0 > 0$ astfel încât

$$g(x, t) \geq \rho_0 \quad \text{și} \quad \tilde{g}(x, t) \geq \tilde{\gamma}_0, \quad \text{pentru orice } (x, t) \in \bar{Q};$$

(A5) $k \in C^1(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega})$ și $k(x, x') \geq 0$, pentru orice $(x, x') \in \Omega \times \Omega$;

(A6) $h_0, p_0 \in L^\infty(\Omega)$ și $h_0(x) \geq h_0^0 > 0$, $p_0(x) \geq p_0^0 > 0$, a.p.t. $x \in \Omega$ (aici h_0^0, p_0^0 sunt constante pozitive);

(A7) $\Psi \in C^1(\Omega)$ astfel încât $1 \geq \Psi(x) > 0$, pentru orice $x \in \omega$, și $\Psi(x) = 0$, pentru orice $x \in \Omega \setminus \omega$. În plus $\Psi(x)\mathbb{1}_\omega(x) = \Psi(x)$, pentru orice $x \in \Omega$ (aceasta înseamnă, de asemenea, că efortul de infuzie are eficacitate nulă la frontiera lui ω).

De asemenea $\omega_0 \subset \omega$ este o bilă deschisă astfel încât

$$\Psi(x) \geq c > 0, \quad \text{pentru orice } x \in \omega_0.$$

Infuzia funcționează astfel: prădătorii sunt introduși într-o subzonă centrală ω_0 , dar densitatea lor scade treptat spre frontiera lui ω pe măsură ce populația se răspândește în întreaga subregiune. Prin urmare, odată ce populația se dispersează dincolo de ω_0 , eficacitatea infuziei scade spre 0, adică, Ψ este pozitivă în ω , dar nu în mod uniform;

(A8) $c_0, d_1, d_2 > 0$;

Dacă interpretăm h ca densitatea populației unei specii străine dăunătoare, devine esențial să determinăm dacă există un control u astfel încât, pentru soluția (h^u, p^u) a lui (4.1), să obținem că $\lim_{t \rightarrow \infty} h^u(\cdot, t) = 0$ într-un spațiu funcțional adecvat. Este important de remarcat că aceasta este o problemă de zero-stabilizabilitate

cu restricții asupra stării, deoarece atât $h(x, t)$, cât și $p(x, t)$ reprezintă densități ale populațiilor, și astfel trebuie să rămână nenegative.

Să amintim că populația dăunătoare este eradicabilă (zero-stabilizabilă), dacă pentru orice h_0, p_0 ce satisfac (A6), există un control u , ce acționează în $\bar{\omega}$, astfel încât

$$h^u(x, t), p^u(x, t) \geq 0, \quad \text{a.p.t. } x \in \Omega, \text{ pentru orice } t \geq 0,$$

și

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h^u(\cdot, t) = 0 \quad \text{în } L^\infty(\Omega).$$

4.2 O condiție suficientă pentru eradicarea populației de dăunători

În această secțiune vom examina condițiile în care populația pradă poate fi eradicată utilizând controlul de tip infuzie $u(x, t) = \gamma \Psi(x) p(x, t)$, pentru orice $x \in \Omega$ și $t > 0$, și pentru un anumit $\gamma \geq 0$.

Vom vedea că problema eradicării este profund legată de semnul autovalorii principale λ_1^γ pentru problema de autovalori

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) = r(x, t)\varphi(x, t) + d_1 \Delta \varphi(x, t) \\ \quad - \varphi(x, t) \int_{\Omega} k(x, x') \bar{p}^*(x, t) dx' + \lambda \varphi(x, t), & (x, t) \in Q, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n}(x, t) = 0, & (x, t) \in \Sigma, \\ \varphi(x, t) = \varphi(x, t + T), & (x, t) \in Q, \end{cases} \quad (4.3)$$

unde $\bar{p}^*$ este o funcție T -periodică (adică $\bar{p}^*(x, t) = \bar{p}^*(x, t + T)$), pentru orice $(x, t) \in \bar{Q}$) care este unica soluție global regulată pozitivă a lui (dacă γ este suficient de mare)

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial t}(x, t) = -a(x, t)\bar{p}^*(x, t) - \tilde{g}(x, t)\bar{p}^*(x, t)^2 + d_2 \Delta \bar{p}^*(x, t) \\ \quad + \gamma \Psi(x) \bar{p}^*(x, t), & (x, t) \in Q, \\ \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial n}(x, t) = 0, & (x, t) \in \Sigma, \\ \bar{p}^*(x, t) = \bar{p}^*(x, t + T), & (x, t) \in Q, \end{cases} \quad (4.4)$$

ceea ce înseamnă că $\bar{p}^* \in C^{2+\eta, 1+\frac{\eta}{2}}(\bar{\Omega} \times [0, \infty))$, pentru un anumit $\eta \in (0, 1)$. Existența și unicitatea funcției $\bar{p}^*$ se bazează pe aplicarea punctului (i_3) din Teorema 5.6.

Mai precis, $\bar{p}^*$ satisface

$$\|\bar{p}(\cdot, t) - \bar{p}^*(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \rightarrow 0, \quad \text{pentru } t \rightarrow \infty, \quad (4.5)$$

unde $\bar{p}$ este unica soluție slabă nenegativă pentru

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{p}}{\partial t}(x, t) = -a(x, t)\bar{p}(x, t) - \tilde{g}(x, t)\bar{p}(x, t)^2 + d_2\Delta\bar{p}(x, t) + \gamma\Psi(x)\bar{p}(x, t), & (x, t) \in Q, \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial n}(x, t) = 0, & (x, t) \in \Sigma, \\ \bar{p}(x, 0) = p_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (4.6)$$

Existența și unicitatea soluției slabe a lui (4.6) rezultă utilizând teorema de punct fix a lui Banach, ca în Capitolul 2 (a se vedea Lema 2.5).

Rezultă că

$$p(x, t) \geq \bar{p}(x, t) \geq 0, \quad \text{a.p.t. } x \in \Omega, \text{ pentru orice } t \geq 0, \quad (4.7)$$

Să considerăm următoarea problemă de autovalori:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) = -a(x, t)\varphi(x, t) + d_2\Delta\varphi(x, t) + \gamma\Psi(x)\varphi(x, t) + \mu_{1\gamma}\varphi(x, t), & (x, t) \in Q, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n}(x, t) = 0, & (x, t) \in \Sigma, \\ \varphi(x, t) = \varphi(x, t + T), & (x, t) \in Q. \end{cases} \quad (4.8)$$

Notăm cu $\mu_{1\gamma}$ autovaloarea principală pentru (4.8) și cu φ_1^γ , o autofuncție pozitivă corespunzătoare.

Vom folosi următoarele rezultate tehnice:

Lema 4.2 *Autovaloarea principală $\mu_{1\gamma}$ este negativă, pentru $\gamma > 0$ suficient de mare.*

Rezultatul următor oferă o condiție suficientă pentru zero-stabilizabilitatea (eradicarea) populației pradă (dăunătoare).

Teorema 4.3 *Fie (h, p) unica soluție slabă, cu componente nenegative și local esențial mărginite, a lui (4.1), corespunzătoare controlului de infuzie $u := +\gamma\Psi p$, și λ_1^γ autovaloarea principală pentru (4.3).*

Dacă $\lambda_1^\gamma > 0$, atunci populația pradă h este eradicabilă.

4.3 O condiție necesară pentru eradicarea populației de dăunători

Să discutăm acum o condiție necesară pentru eradicarea populației dăunătoare. Analiza noastră va fi din nou strâns legată de $\bar{p}$, soluția slabă, nenegativă și local esențial mărginită, a lui (4.6), și de unica soluție global regulată strict pozitivă $\bar{p}^*$ a lui (4.4).

Teorema 4.4 *Fie (h, p) unica soluție slabă a lui (4.1), corespunzătoare controlului de infuzie $u := +\gamma\Psi p$, cu $\gamma \geq 0$.*

Dacă

$$h(\cdot, t) \rightarrow 0, \text{ în } L^\infty(\Omega), \text{ pentru } t \rightarrow \infty, \quad (4.9)$$

atunci

$$\lambda_1^\gamma \geq 0,$$

unde λ_1^γ este autovaloarea principală pentru (4.3).

Anexă

În cele ce urmează presupunem că $m, b \in C^1(\bar{\Omega} \times [0, \infty))$, cu $m(x, t) = m(x, t + T)$, $b(x, t) = b(x, t + T)$, pentru orice $(x, t) \in \bar{\Omega} \times [0, \infty)$, și $b(x, t) \geq b_0 > 0$, pentru orice $(x, t) \in \bar{\Omega} \times [0, \infty)$.

De asemenea notăm cu

$$X_1 = \left\{ v \in W^{2,2}(\Omega); \frac{\partial v}{\partial n} = 0, \text{ pe } \partial\Omega \right\}$$

și

$$Y_1 = \left\{ v \in W^{2,2}(\Omega \setminus \bar{\omega}); \frac{\partial v}{\partial n} = 0, \text{ pe } \partial\Omega, \text{ și } v = 0, \text{ pe } \partial\omega \right\}.$$

Definiția 5.1 (a se vedea [27]) Fie $\mu, \nu \in [0, 1)$ și $a, b \in \mathbb{R}$, cu $a < b$. Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ deschis și mărginit. Definim următorul **spațiu Hölder**

$$C^{\mu, \nu}(\bar{\Omega} \times [a, b])$$

ca fiind mulțimea tuturor funcțiilor $u \in C(\bar{\Omega} \times [a, b])$ astfel încât există $C_{\mu, \nu} > 0$:

$$|u(x_1, t_1) - u(x_2, t_2)| \leq C_{\mu, \nu} [|x_1 - x_2|^\mu + |t_1 - t_2|^\nu],$$

pentru orice $(x_1, t_1), (x_2, t_2) \in \bar{\Omega} \times [a, b]$.

Apoi, pentru $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, definim spațiul

$$C^{k_1 + \mu, k_2 + \nu}(\bar{\Omega} \times [a, b])$$

ca fiind mulțimea tuturor funcțiilor $u \in C^{k_1, k_2}(\bar{\Omega} \times [a, b])$ astfel încât

$$u, \frac{\partial u}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^{k_2} u}{\partial t^{k_2}}, D^\alpha u \in C^{\mu, \nu}(\bar{\Omega} \times [a, b]), \quad \text{pentru orice } \alpha \in \mathbb{N}^N, \text{ cu } |\alpha| \leq k_1.$$

Remarca 5.2 În particular, pentru **soluțiile global regulate**, lucrăm cu spațiul Hölder

$$C_{loc}^{2+\eta, 1+\frac{\eta}{2}}(\bar{\Omega} \times (0, \infty)), \quad \text{pentru } \eta \in [0, 1).$$

Definiția 5.3 Fie $u_0 \in L^2(\Omega)$. Spunem că u este o soluție global regulată pentru

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \Delta u(x, t) = m(x, t)u(x, t) - b(x, t)u(x, t)^2, & (x, t) \in Q, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x, t) = 0, & (x, t) \in \Sigma, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (5.1)$$

dacă $u \in C(\bar{\Omega} \times [0, \infty)) \cap C_{loc}^{2+\eta, 1+\frac{\eta}{2}}(\bar{\Omega} \times (0, \infty))$, pentru $\eta \in [0, 1)$, și satisface (5.1).

Rezultatul următor este o consecință a Propoziției 24.9 din [32].

Propoziția 5.4 (a se vedea [32, Proposition 24.9]) Dacă $u_0 \in X_1$ este nenegativă, atunci ecuația logistică

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \Delta u(x, t) = m(x, t)u(x, t) - b(x, t)u(x, t)^2, & (x, t) \in Q, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x, t) = 0, & (x, t) \in \Sigma, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega \end{cases} \quad (5.2)$$

admite o unică **soluție global regulată** notată cu $u(t; u_0)$.

Rezultatul următor este o consecință a Teoremei 24.1 și a Teoremei 24.2 din [32].

Teorema 5.5 Fie $\bar{a} \in C^1(\bar{\Omega} \times [0, \infty))$. Atunci problema liniară

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \Delta u(x, t) + \bar{a}(x, t)u(x, t) = 0, & (x, t) \in Q, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x, t) = 0, & (x, t) \in \Sigma, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega \end{cases}$$

admite, pentru orice date inițiale $u_0 \in C^3(\bar{\Omega})$, cu $\frac{\partial u_0}{\partial n} = 0$ pe $\partial\Omega$, o unică **soluție global regulată** notată cu $u(t; u_0)$.

Să considerăm problema de autovalori asociată lui (5.2):

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) - \Delta \varphi(x, t) = m(x, t)\varphi(x, t) + \lambda\varphi(x, t), & (x, t) \in Q, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n}(x, t) = 0, & (x, t) \in \Sigma, \\ \varphi(x, t) = \varphi(x, t + T), & (x, t) \in Q. \end{cases} \quad (5.3)$$

Problema (5.3) admite o autovaloare principală λ_1 .

Un rezultat cheie folosit pe tot parcursul acestei lucrări este [32, Theorem 24.10] (a se vedea de asemenea [36]), împreună cu caracterizarea autovalorii principale prezentată la pagina 201 din [32]. În cele ce urmează prezentăm o consecință a acestui rezultat, adaptată la cadrul nostru.

Teorema 5.6 (a se vedea [32], Theorem 24.10) Fie u o soluție global regulată pentru (5.2) (a se vedea Propoziția 5.4 și Teorema 5.5) și fie $u_0 \in X_1 \setminus \{0\}$, u_0 nenegativă.

- (i₁) Presupunem că autovaloarea principală corespunzătoare problemei (5.3) este **nenegativă**. Atunci, soluția nulă a problemei (5.2) este global asimptotic stabilă, adică avem că

$$\|u(t; u_0)\|_{C(\bar{\Omega})} \rightarrow 0, \quad \text{pentru } t \rightarrow \infty.$$

- (i₂) Presupunem că autovaloarea principală corespunzătoare problemei (5.3) este **pozitivă**. Considerăm **cazul particular** $b = 0$ în (5.2). Atunci, soluția nulă a problemei (5.2) este global asimptotic stabilă, adică avem că

$$\|u(t; u_0)\|_{C(\bar{\Omega})} \rightarrow 0, \quad \text{pentru } t \rightarrow \infty.$$

- (i₃) Presupunem că autovaloarea principală corespunzătoare problemei (5.3) este **negativă**. Atunci, există o unică soluție global regulată, netrivială, pozitivă, periodică u^* pentru următoarea EDP

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \Delta u(x, t) = m(x, t)u(x, t) - b(x, t)u(x, t)^2, & (x, t) \in Q, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x, t) = 0, & (x, t) \in \Sigma, \\ u(x, t) = u(x, t + T), & (x, t) \in Q. \end{cases}$$

În plus, u^* este pozitivă peste tot (în $\bar{\Omega} \times (0, \infty)$) și este global asimptotic stabilă, adică

$$\|u(t; u_0) - u^*(t)\|_{C(\bar{\Omega})} \rightarrow 0, \quad \text{pentru } t \rightarrow \infty.$$

Remarca 5.7 Concluziile din Teorema 5.6 rămân, de asemenea, valabile dacă folosim spațiul funcțional Y_1 . În acest caz u^* este pozitivă pe $(\bar{\Omega} \setminus \bar{\omega}) \times (0, \infty)$.

Direcții viitoare de cercetare

Controlul regional al populației invazive

Ne propunem să investigăm problema **minimizării costului total** asociat **daunelor** produse de o populație invazivă de prădători și **costul controlului regional** utilizat pentru reducerea acestei populații printr-un bio-control. Costul controlului corespunde intervenției necesare pentru a introduce o nouă populație de prădători p într-o subregiune a întregului habitat, pentru a vâna populația străină dăunătoare h . Dinamica celor două populații este descrisă de sistemul pradă-prădător dat de (4.1), modificat astfel

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t}(x, t) = \tilde{r}(x, t)h(x, t) - g(x, t)h(x, t)^2 + d_1 \Delta h(x, t) \\ \quad - h(x, t) \int_{\Omega} k(x, x')p(x', t)dx', \quad (x, t) \in Q, \\ \frac{\partial p}{\partial t}(x, t) = -a(x, t)p(x, t) - \tilde{g}(x, t)p(x, t)^2 + d_2 \Delta p(x, t) \\ \quad + c_0 h(x, t) \int_{\Omega} k(x, x')p(x', t)dx' + u(x, t), \quad (x, t) \in Q, \\ \frac{\partial h}{\partial n}(x, t) = \frac{\partial p}{\partial n}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Sigma, \\ h(x, 0) = h_0(x), \quad p(x, 0) = p_0(x), \quad x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (5.4)$$

cu un control feedback definit ca

$$u := \gamma \mathbb{1}_{\omega} p, \quad \text{cu } \gamma > 0.$$

După cum am arătat deja în Capitolul 4, controalele de acest tip, precum cel dat în (4.2), oferă atât o condiție suficientă, cât și una necesară, pentru eradicarea populației dăunătoare h .

Problema de minimizare asociată unui astfel de control feedback poate fi văzută ca o problemă de control regional. Metoda mulțimilor de nivel (level set) va constitui un ingredient esențial. Va fi de asemenea obținut un algoritm iterativ pentru reducerea costului total, iar rezultatele numerice vor demonstra eficacitatea rezultatelor teoretice. Același rezultat de optimalitate pot fi studiate pentru sistemul (2.1), în care prădătorul nu urmărește prada, ci se întoarce la locația sa inițială.

Mai precis, obiectivul nostru este de a găsi o subregiune ω , pe care o vom considera a fi o bilă centrată în $x_0 \in \mathbb{R}^n$ și de rază $r > 0$ (nu suntem interesați de forma regiunii, ci mai degrabă de poziția regiunii în raport cu centrul său x_0), care să minimizeze costul total al daunelor, exprimat prin următoarea funcțională de cost

$$J(x_0) = C \int_0^T \int_{\Omega} h^{x_0}(x, t) dx dt + \int_{\Omega} h^{x_0}(x, T) dx + D \int_0^T \int_{\omega} p^{x_0}(x, t) dx dt. \quad (5.5)$$

Aici:

- termenul $\int_0^T \int_{\Omega} h^{x_0}(x, t) dx dt$ reprezintă dimensiunea totală a populației dăunătoare h în Ω pe intervalul de timp $[0, T]$; deoarece h vânează și dăunează unei alte populații de interes, minimizarea acestei cantități minimizează direct dauna totală produsă de dăunător;
- termenul $\int_{\Omega} h^{x_0}(x, T) dx$ reprezintă dimensiunea populației dăunătoare h rămasă în Ω la finalul intervenției, la momentul T ; solicităm ca aceasta să fie mică, pentru a ne asigura că populația dăunătoare a fost cu adevărat suprimată și nu va reveni după încetarea intervenției;
- termenul $\int_0^T \int_{\omega} p^{x_0}(x, t) dx dt$ reprezintă numărul total de indivizi din populația de prădători p introduși în subregiunea ω pe parcursul intervenției; acest termen reprezintă costul intervenției, adică dorim să minimizăm dauna produsă de h utilizând cât mai puțini prădători introduși posibil;
- constantele $C, D > 0$ reprezintă constante de conversie care asigură faptul că întreaga funcțională J este exprimată folosind aceeași unitate de măsură.

Astfel dorim să minimizăm J în raport cu centrul x_0 al bilei $\omega := B(x_0, r)$. Vom vedea că

$$p^{x_0}(x, t) \geq K_1^{x_0}(x, t), \quad \text{a.p.t. } (x, t) \in Q \quad (5.6)$$

unde $K_1^{x_0}$ satisface

$$\begin{cases} \frac{\partial K_1}{\partial t}(x, t) = -a(x, t)K_1(x, t) - \tilde{g}(x, t)K_1(x, t)^2 + d_2\Delta K_1(x, t) \\ \quad + \gamma \mathbb{1}_{\omega}(x) K_1(x, t), & (x, t) \in Q, \\ \frac{\partial K_1}{\partial n}(x, t) = 0, & (x, t) \in \Sigma, \\ K_1(x, 0) = p_0(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

Utilizând (5.6) putem acum construi $y_1^{x_0}$ care satisface

$$\begin{cases} \frac{\partial y_1}{\partial t}(x, t) = \tilde{r}(x, t) y_1(x, t) - g(x, t) y_1(x, t)^2 + d_1\Delta y_1(x, t) \\ \quad - y_1(x, t) B(K_1^{x_0}(x))(t), & (x, t) \in Q, \\ \frac{\partial y_1}{\partial n}(x, t) = 0, & (x, t) \in \Sigma, \\ y_1(x, 0) = h_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (5.7)$$

unde $B \in L(L^2(\Omega))$ și $(Bz)(x) = \int_{\Omega} k(x, x') z(x') dx'$, astfel încât

$$h^{x_0}(x, t) \leq y_1^{x_0}(x, t), \quad \text{a.p.t. } (x, t) \in Q. \quad (5.8)$$

În mod similar, vom vedea că

$$h^{x_0}(x, t) \leq K_2^{x_0}(x, t), \quad \text{a.p.t. } (x, t) \in Q, \quad (5.9)$$

unde, utilizând (5.6)), avem că $K_2^{x_0}$ satisface

$$\begin{cases} \frac{\partial K_2}{\partial t}(x, t) = \tilde{r}(x, t) K_2(x, t) - g(x, t) K_2(x, t)^2 + d_1 \Delta K_2(x, t), & (x, t) \in Q, \\ \frac{\partial K_2}{\partial n}(x, t) = 0, & (x, t) \in \Sigma, \\ K_2(x, 0) = h_0(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

Utilizând (5.9) putem construi $y_2^{x_0}$ care satisface

$$\begin{cases} \frac{\partial y_2}{\partial t}(x, t) = -a(x, t) y_2(x, t) - \tilde{g}(x, t) y_2(x, t)^2 + d_2 \Delta y_2(x, t) \\ \quad + c_0 K_2^{x_0}(x, t) B(y_2(x))(t) + \gamma \mathbb{1}_\omega(x) y_2(x, t), & (x, t) \in Q, \\ \frac{\partial y_2}{\partial n}(x, t) = 0, & (x, t) \in \Sigma, \\ y_2(x, 0) = p_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (5.10)$$

astfel încât

$$p^{x_0}(x, t) \leq y_2^{x_0}(x, t), \quad \text{a.p.t. } (x, t) \in Q. \quad (5.11)$$

Prin urmare, din (5.8) și (5.11), observăm că **minimizând**

$$\tilde{J}(x_0) = C \int_0^T \int_\Omega y_1^{x_0}(x, t) dx dt + \int_\Omega y_1^{x_0}(x, T) dx + D \int_0^T \int_\omega y_2^{x_0}(x, t) dx dt \quad (5.12)$$

obținem o valoare și mai mică pentru $J(x_0)$. Minimizarea lui $\tilde{J}$ simplifică problema de optimizare, deoarece ecuațiile (5.7) și (5.10) sunt decuplate, și putem trata $y_1^{x_0}$ și $y_2^{x_0}$ independent, spre deosebire de (5.4), unde soluțiile h și p sunt cuplate împreună (acestea interacționează).

Anumite probleme de control optimal în biologia matematică au fost tratate în [4], [19], [22], [29], [31]. Trebuie de asemenea să menționăm câteva rezultate recente privind controlul regional în dinamica populațiilor din [11]. Pentru noțiuni și metode de bază în teoria optimizării de forme, a se vedea [47].

Obiectiv:

După cum am menționat anterior, această cercetare viitoare va fi dedicată unei aproximări a problemei (5.12). Ne vom concentra apoi pe deducerea unui algoritm iterativ menit să reducă costul total prin actualizarea poziției centrului x_0 al subdomeniului ω . O atenție deosebită va fi acordată, de asemenea, obținerii de rezultate numerice în cazul interacțiunilor nelocale.

După cum am discutat mai sus, minimizarea asociată acestui control feedback poate fi formulată ca o problemă de control regional. Metoda mulțimilor de nivel joacă un rol central în abordarea noastră. În acest scop, introducem următoarele elemente.

În cadrul de mai sus, obiectivul nostru este de a obține o expresie pentru derivata direcțională a lui $\tilde{J}$.

Din expresia derivatei vom obține o metodă de tip gradient-descendent pentru actualizarea centrului bilei care definește regiunea de control. Aceasta furnizează pasul practic de optimizare utilizat în algoritmul numeric.

Ca o extindere a acestei analize, ne propunem de asemenea să studiem problema **maximizării autovalorii principale**, care este strâns legată de viteza cu care are loc eradicarea. Mai precis, am dori să determinăm **forma și poziția optimă a subdomeniului** $\omega \subset \Omega$ pe care acționează controlul, pentru a conduce populația de prădători spre eradicare, cât mai rapid posibil. Această problemă este strâns legată de cea a controlului optimal, urmând o abordare similară celei din [11].

Stabilizarea la zero în ipoteze de regularitate mai slabe

Pornind de la rezultatele acestei lucrări, urmărim să relaxăm ipotezele de regularitate asupra coeficienților și datelor inițiale ale ecuațiilor care descriu interacțiunea pradă-prădător. În loc să solicităm ca coeficienții să fie continuu diferențiabili, vom lucra în ipoteze mai slabe. Pentru a compensa acest lucru, vom utiliza tehnici de comparație între soluții ale operatorilor parabolici cu parametri mai puțin regulați și cele corespunzătoare unor parametri suficient de regulați. Scopul este de a obține **condiții mai slabe**, dar în continuare relevante, **necesare și suficiente**, care să determine când populația de prădători este condusă la extincție.

Stabilizarea la zero cu termeni diferiți de răspuns funcțional

Putem considera, de asemenea, situația în care sistemul care descrie interacțiunea dintre cele două populații include termeni mai complecși, în care răspunsul funcțional la prădare este de tip **Holling II**. În acest caz, ecuația care modelează evoluția densității prăzii ar fi modificată sub forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t}(x, t) = & r(x, t)h(x, t) - g(x, t)h(x, t)^2 + d_1\Delta h(x, t) \\ & - \frac{\alpha_1(x)h(x, t)}{\beta_1(x)h(x, t) + \theta_1(x, t)} \int_{\Omega} k(x, x')p(x', t)dx'. \end{aligned}$$

Ultimul termen modelează pierderea prăzii datorată prădării. Frația

$$\frac{\alpha_1(x)h(x, t)}{\beta_1(x)h(x, t) + \theta_1(x, t)}$$

descrie o rată de prădare care crește odată cu densitatea prăzii, dar apare o saturație la o valoare maximă, în loc să crească fără limită, ceea ce ar fi nerealist din punct de vedere biologic.

În cazul introducerii unui termen de tip **Holling III**, termenul de prădare este modificat prin înlocuirea lui $h(x, t)$ cu $h(x, t)^2$ atât în numărător, cât și în numitor, astfel:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t}(x, t) = & r(x, t)h(x, t) - g(x, t)h(x, t)^2 + d_1\Delta h(x, t) \\ & - \frac{\alpha_1(x)h(x, t)^2}{\beta_1(x)h(x, t)^2 + \theta_1(x, t)} \int_{\Omega} k(x, x')p(x', t)dx'. \end{aligned}$$

Rolurile lui $\alpha_1(x)$, $\beta_1(x)$, $\theta_1(x)$ și ale termenului integral rămân aceleași ca în cazul de tip Holling II. Ceea ce se schimbă fundamental este modul în care prădătorii răspund la modificările densității populației de dăunători.

Mai precis, în cazul termenului de tip Holling II, prădarea rămâne eficientă la densități mici ale prăzii, deoarece, de îndată ce prada este prezentă, prădătorii încep să o consume cu o rată semnificativă. Termenul pătratic $h(x, t)^2$ din cazul termenului de tip Holling III introduce o **realitate biologică foarte diferită**: prădătorii sunt mai puțin eficienți atunci când prada este rară. Acest lucru poate reflecta mai multe fenomene reale, precum **schimbarea prăzii** (prădătorii se concentrează asupra unor surse alternative de hrană, mai abundente, atunci când prada este rară), **învățarea de către prădători** (prădătorii devin mai eficienți în capturarea unei anumite prăzi doar după întâlniri repetate) sau pur și simplu **reducerea probabilității întâlnirilor dintre prădători și pradă** la densități mici, într-un context spațial.

Bibliografie

- [1] F. Andreu-Vaillo, J. M. Mañon, J. D. Rossi, J. J. Toledo-Melero, *Nonlocal Diffusion Problems*, AMS, Rhode Island, 2010.
- [2] H. Amann, *Linear and Quasilinear Parabolic Problems*, Vol. 1, Birkhäuser Verlag, Basel, 1995.
- [3] H. Amann, *Linear and Quasilinear Parabolic Problems*, Vol. 2, Birkhäuser, Cham, 2019.
- [4] S. Anița, *Analysis and Control of Age-Dependent Population Dynamics*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000.
- [5] S. Anița, T. Baciuc, V. Capasso, *Eradicating an alien predator population in a seasonal environment*, Math. Meth. Appl. Sci., 48 (8) (2025), 9126-9139.
- [6] S. Anița, V. Capasso, *A stabilizability problem for a reaction-diffusion system modelling a class of spatially structured epidemic model*, Nonlin. Anal. Real World Appl. 3 (2002), 453-464.
- [7] S. Anița, V. Capasso, *A stabilization strategy for a reaction-diffusion system modelling a class of spatially structured epidemic systems (think globally, act locally)*, Nonlin. Anal. Real World Appl., 10 (2009), 2026-2035.
- [8] S. Anița, V. Capasso, *On the stabilization of reaction-diffusion systems modelling a class of man-environment epidemics: A review*, Math. Meth. Appl. Sci., 33 (2010), 1235-1244.
- [9] S. Anița, V. Capasso, *Stabilization of a reaction-diffusion system modelling malaria transmission*, Discrete Cont. Dyn. Syst., Series B, 17 (2012), 1673-1684. Special issue in honour of "A. Friedman".
- [10] S. Anița, V. Capasso, *Stabilization of a reaction-diffusion system modelling a class of spatially structured epidemic systems via feedback control*, Nonlin. Anal. Real World Appl., 13 (2012), 725-735.
- [11] S. Anița, V. Capasso, G. Dimitriu, *Controlling an alien predator population by regional controls*, Nonlin. Anal. Real World Appl., 46 (2019), 82-97.
- [12] S. Anița, V. Capasso, S. Scacchi, *Mathematical Modeling and Control in Life and Environmental Sciences. Regional Control Problems*, Birkhäuser, Springer Nature, Cham, 2024.
- [13] S. Anița, W.-E. Fitzgibbon, M. Langlais, *Global existence and internal stabilization for a class of prey-predator systems posed on non coincident spatial domains*, Discrete Cont. Dyn. Syst., Series B, 11 (2009), 805-822.
- [14] N. Bacaër, *A short history of mathematical population dynamics*, Springer-Verlag, London, 2011.

- [15] T. Baci, *Eradicating a pest population via a predator in a seasonal environment*, Discrete Cont. Dyn. Syst., Series B, 33 (2026), 92-109.
- [16] V. Barbu, *Probleme la limit pentru ecuaii cu derivate pariale*, Editura Academiei Romne, Bucureti, 1993.
- [17] V. Barbu, *Mathematical Methods in Optimization of Differential Systems*, Springer Science + Business Media, Dordrecht, 1994.
- [18] V. Barbu, *Partial Differential Equations and Boundary Value Problems*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998.
- [19] A. O. Belyakov, V. M. Veliov, *On optimal harvesting in age-structured populations*, Research Report 2015-08, ORCOS, TU Wien, 2015.
- [20] A. Bressan, *Differential inclusions and the control of forest fires*, J. Diff. Eqs., 243 (2007), 179-207.
- [21] A. Bressan, M. T. Chiri, N. Salehi, *On the optimal control of Propagation Fronts*, Math. Models Methods Appl.Sci., 32 (6) (2022), 1109-1140.
- [22] A. Bressan, G.M. Coclite, W. Shen, *A Multidimensional optimal-harvesting problem with measure-valued solutions*, SIAM J. Control. Optim., 51 (2013), 1186-1202.
- [23] A. Bressan, W. Shen, *Measure valued solutions to a harvesting game with several players*, in Advances in Dynamic Games: Theory, Applications, and Numerical Methods for Differential and Stochastic Games, Michle Breton, Krzysztof Szajowski, Birkhuser, Boston, 399-423, 2011.
- [24] A. Bressan, V. Staicu, *On the competitive harvesting of marine resources*, SIAM J. Control. Optim., 57 (6) (2019), 3961-3984.
- [25] A. Bressan, M. Zhang, *Controlled traveling profiles for models of invasive biological species*, ESAIM: COCV, 30 (28), 2024.
- [26] H. Brzis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer Science+Business Media, New York, 2011.
- [27] H. Brzis, *Analyse Fonctionnelle* (2^e tirage), Masson, Paris, 1987.
- [28] G. M. Coclite, G. Devillanova, S. Solimini, *Measure valued solutions for an optimal harvesting problem*, J. Math. Pure. Appl., 142 (2020), 204-228.
- [29] G. M. Coclite, M. Garavello, *A time dependent optimal harvesting problem with measure valued solutions*, SIAM J. Control Optim., 55 (2017), 913-935.
- [30] G. M. Coclite, M. Garavello, *Measure optimal controls for models inspired by biology*, SIAM J. Control Optim., 60 (5) (2022), 3051-3077.

- [31] G.M. Coclite, M. Garavello, L. V. Spinolo, *Optimal strategies for a time-dependent harvesting problem*, Discrete Cont. Dyn. Syst., Series S, 11 (2018), 865-900.
- [32] D. Daners, P. Koch-Medina, *Abstract Evolution Equations, Periodic Problems and Applications*, Longman Scientific & Technical, Burnt Mill, 1992.
- [33] K. R. Fister, S. Lenhart, *Optimal harvesting in an age-structured prey-predator model*, Appl. Math. Optim., 54 (2006), 1–15.
- [34] A. Friedman, *Partial Differential Equations of Parabolic Type*, Prentice-Hall, Englewoods Cliffs, 1964.
- [35] S. Genieys, V. Volpert, P. Auger, *Pattern and waves for a model in population dynamics with nonlocal consumption of resources*, Math. Model. Nat. Phenom., 1 (1) (2006), 63-80.
- [36] P. Hess, *Periodic-Parabolic Boundary Value Problems and Positivity*, Pitman, Harlow, 1991.
- [37] N. Hritonenko, Y. Yatsenko, *Optimization of harvesting age in integral age-dependent model of population dynamics*, Math. Biosci, 195 (2) (2005), 154-167.
- [38] King-Yeung Lam, Yuan Lou, *Introduction to Reaction-Diffusion Equations, Theory and Applications to Spatial Ecology and Evolutionary Biology*, Springer, Cham, 2022.
- [39] D. Mezzanotte, D. Occorsio, M. G. Russo, E. Venturino, *A discretization method for nonlocal diffusion type equations*, Annali dell'Università di Ferrara, 68 (2) (2022), 505-520.
- [40] D. Mezzanotte, D. Occorsio, E. Venturino, *Analysis of a line method for reaction-diffusion models of nonlocal type*, Appl. Numer. Math., 203 (2024), 255-268.
- [41] J. D. Murray, *Mathematical Biology*, Second Edition, Springer Berlin, Heidelberg, 1993.
- [42] C. Pouchol, E. Trélat, C. Zhang, *Approximate control of parabolic equations with on-off shape controls by Fenchel duality*, Ann. Inst. Henri Poincaré (Analyse non linéaire), 41 (6) (2024), 1465-1507.
- [43] C. Pouchol, E. Trélat, E. Zuazua, *Phase portrait control for 1D monostable and bistable reaction-diffusion equations*, Nonlinearity, 32 (3) (2019), 884.
- [44] M. H. Protter, H. F. Weinberger, *Maximum Principles in Differential Equations*, Springer, New York, 1984.
- [45] D. Ruiz-Balet, E. Zuazua, *Control under constraints for multi-dimensional reaction-diffusion monostable and bistable equations*, J. Pure Appl. Math., 143 (2020), 345-375.

- [46] S. Salsa, *Partial Differential Equations in Action*, Third Edition, Springer, Switzerland, 2016.
- [47] J. Sokolowski, J.-P. Zolesio, *Introduction to Shape Optimization*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [48] V. Volpert, S. Petrovskii, *Reaction-diffusion waves in biology*, Phys. Life Rev., 6 (4) (2009), 267-310.
- [49] Ioan. I. Vrabie, *C_0 Semigroups and Applications*, North-Holland, Amsterdam, 2003.