



UNIVERSITATEA „ALEXANDRU IOAN CUZA” DIN IAȘI
FACULTATEA DE MATEMATICĂ

REZUMATUL TEZEI DE DOCTORAT

Coordonator,
Prof. Dr. Cezar ONICIUC

Student doctorand,
Ștefan-Constantin ANDRONIC

Iași, 2026

UNIVERSITATEA „ALEXANDRU IOAN CUZA” DIN IAȘI
FACULTATEA DE MATEMATICĂ

GEOMETRIA SUBVARIETĂȚILOR BIARMONICE ȘI
BICONSERVATIVE ÎN FORME SPAȚIALE

Coordonator,
Prof. Dr. Cezar ONICIUC

Student doctorand,
Ștefan-Constantin ANDRONIC

Iași, 2026

ANUNȚ

La data de 23.06.2026, ora 10:00, în Sala de Conferințe a Facultății de Matematică, domnul **ANDRONIC T. ȘTEFAN-CONSTANTIN** va susține, în ședință publică, teza de doctorat cu titlul "**On the geometry of biharmonic and biconservative submanifolds in space forms**", în vederea obținerii titlului științific de doctor în domeniul Matematică.

Comisia de doctorat are următoarea componență:

Președinte:

Prof. univ. dr. Răzvan LIȚCANU, Universitatea „Alexandru Ioan Cuza” din Iași

Conducător de doctorat:

Prof. univ. dr. Cezar ONICIUC, Universitatea „Alexandru Ioan Cuza” din Iași

Referenți:

Prof. univ. dr. Stefano MONTALDO, Università degli Studi di Cagliari, Italia

Prof. univ. dr. Sergiu MOROIANU, Universitatea din București, România

Prof. univ. dr. Joeri VAN DER VEKEN, KU Leuven, Belgium

Teza poate fi consultată la Biblioteca Facultății de Matematică.

Vă invităm să participați la ședința de susținere a tezei.

Data afișării: 26.05.2026

MULȚUMIRI

Aș dori să îmi exprim recunoștința față de Prof. Dr. Cezar Oniciuc, coordonatorul meu de doctorat, pentru îndrumarea și sprijinul său constant, precum și pentru răbdarea pe care a arătat-o pe parcursul studiilor mele doctorale. Îndrumarea sa a fost neprețuită pentru dezvoltarea mea ca cercetător.

De asemenea, aș dori să le mulțumesc membrilor comisiei mele de doctorat, Prof. Dr. Andrea Ratto, Lect. Dr. Simona Nistor și Prof. Dr. Marian Munteanu, pentru observațiile constructive și sprijinul oferit, care au contribuit la îmbunătățirea rigurozității și clarității acestei teze.

Le sunt recunoscător colaboratorilor mei, Prof. Dr. Stefano Montaldo, Prof. Dr. Yu Fu, Assoc. Prof. Dr. Aykut Kayhan și drd. Antonio Sanna, pentru experiența lor în cercetare și pentru ideile pe care le-au împărtășit cu mine.

În final, aș dori să mulțumesc familiei mele pentru dragostea și încurajarea lor, care au fost neprețuite pe parcursul studiilor mele doctorale.

CUPRINS

Introducere	5
1 Preliminarii	7
1.1 Convenții	7
1.2 Subvarietăți minimale și biarmonice	7
1.3 Subvarietăți biconservative	10
2 Hipersuprafețe biarmonice cu cel mult trei curburi principale distincte în forme spațiale	12
2.1 Demonstrația Teoremei 2.0.1	12
3 Rezultate de tip gap pentru subvarietăți biarmonice în sfere euclidiene	20
3.1 Subvarietăți λ -biarmonice	20
3.1.1 Exemple de hipersuprafețe λ -biarmonice	21
3.1.2 Proprietăți ale subvarietăților PMC λ -biarmonice	22
3.2 Subvarietăți biarmonice de tip produs	24
4 Rezultate de rigiditate pentru hipersuprafețe compacte biconservative	27
4.1 Câteva proprietăți noi ale hipersuprafețelor biconservative	27
4.2 Hipersuprafețe biconservative cu dimensiunea cel mult 10	28
4.2.1 Prima demonstrație alternativă a Teoremei 1.3.5	28
4.2.2 A doua demonstrație alternativă a Teoremei 1.3.5	30
4.2.3 Generalizări ale Teoremei 1.3.5	30
4.3 Hipersuprafețe biconservative de curbură scalară normalizată constantă	31
4.3.1 Demonstrație alternativă a Teoremei 1.3.6	31
4.3.2 O generalizare a Teoremei 1.3.6	32
5 Suprafețe Weingarten biconservative cu fibrat normal plat în forme spațiale 4-dimensionale	33
5.1 Suprafețe biconservative	33
5.2 Suprafețe biarmonice	41
5.3 Direcții viitoare de cercetare	42
Bibliography	44

INTRODUCERE

În această teză studiem subvarietățile biarmonice și biconservative în forme spațiale, generalizări naturale ale faimoaselor subvarietăți minimale. Subvarietățile biarmonice sunt definite ca puncte critice ale funcționalei bienergiei și sunt caracterizate de anularea câmpului de bitensiune. Deoarece orice subvarietate minimală este în mod trivial biarmonică, vom studia subvarietățile biarmonice care nu sunt minimale, numite subvarietăți propriu biarmonice. Cum această noțiune s-a dovedit a fi relativ rigidă, cercetătorii au introdus subvarietățile biconservative, care sunt caracterizate de anularea părții tangente a câmpului de bitensiune.

Una dintre cele mai importante conjecturi în teoria subvarietăților afirmă că *orice subvarietate propriu biarmonică în sfera euclidiană are curbura medie constantă (CMC)*. La începutul acestei teze reanalizăm un rezultat cunoscut care oferă un răspuns pozitiv pentru această conjectură în cazul hipersuprafețelor propriu biarmonice cu cel mult trei curburi principale distincte și indicăm o greșeală la finalul demonstrației acestui rezultat. Mai exact, autorul afirmă că un anumit polinom nu este polinomul nul, ceea ce se dovedește a fi fals cel puțin în cazul unei hipersuprafețe 7-dimensionale care are trei curburi principale distincte cu multiplicitățile 1, 3 și 3. Din cauza volumului mare de calcule, este dificil să lucrăm cu acest polinom. Prin urmare, folosim câteva unelte algebrice pentru a determina un nou polinom și, folosind programarea în limbajul Mathematica, arătăm că acest nou polinom este polinomul nul doar în cazul hipersuprafețelor 7-dimensionale descrise anterior. Apoi, abordând acest caz special într-un mod diferit, demonstrăm ca toate hipersuprafețele propriu biarmonice cu cel mult trei curburi principale distincte sunt CMC.

Apoi, micșorăm imaginea curburii medii a unei clase speciale de subvarietăți propriu biarmonice care au vectorii curbură medie paraleli (PMC) în sfere. Mai precis, considerăm subvarietăți de dimensiune arbitrară m în sfera euclidiană unitară S^n care sunt produse extrinseci a două subvarietăți non-minimale, non-pseudo-umbilicale și PMC în două sfere euclidiene $S^{n_1}(r_1) \subset \mathbb{R}^{n_1+1}$ și $S^{n_2}(r_2) \subset \mathbb{R}^{n_2+1}$, respectiv, unde $r_1 > 0$ și $r_2 > 0$ reprezintă razele celor două sfere, $r_1^2 + r_2^2 = 1$ și $n = n_1 + n_2 + 1$. Arătăm că dacă aceste subvarietăți produs sunt propriu biarmonice în S^n , atunci curburile lor medii sunt mărginite superior de $(m - 4)/m$. Mai mult, dacă această margine superioară este atinsă, atunci subvarietățile se descompun mai departe extrinsec și intră într-o clasă standard de exemple de subvarietăți propriu biarmonice în sfere.

În cazul hipersuprafețelor biconservative, trecem în revistă două rezultate cunoscute de rigiditate pentru acest tip de subvarietăți care generalizează faimoasele rezultate de rigiditate obținute de K. Nomizu și B. Smyth în 1969 și S. Y. Cheng și S. T. Yau în 1977. Oferim demonstrații mai simple și mult mai scurte ale rezultatelor de rigiditate ale hipersuprafețelor biconservative. Aceste noi demonstrații se bazează pe ecuația lui Gauss, proprietățile curburilor scalare ale acestor hipersupra-



fete și pe o nouă tehnică care implică operatorul Cheng-Yau asociat unui tensor cu divergență nulă. Apoi, generalizăm aceste rezultate de rigiditate înlocuind câteva ipoteze importante cu estimări ale pătratului nomei operatorului formă în funcție de curbura medie.

Ultima parte a acestei teze se concentrează pe diversitatea clasei subvarietăților biconservative. Recent, au fost clasificate toate suprafețele biconservative non-CMC care au curbura medie normalizată paralelă (PNMC) în forme spațiale 4-dimensionale, dezvăluind o familie de suprafețe remarcabil de bogată. În consecință, relaxăm ipoteza de PNMC și considerăm suprafețele Weingarten, biconservative non-CMC (non-PNMC) care au fibratul normal plat în forme spațiale 4-dimensionale. Demonstrăm că, sub o ipoteză tehnică, aceste suprafețe sunt caracterizate de un sistem ODE de ordinul întâi, care reprezintă condițiile de compatibilitate ale acestei clase de suprafețe biconservative. Acest fapt este surprinzător pentru că, în general, suprafețele biconservative sunt caracterizate de un sistem PDE în două variabile. Un avantaj important al caracterizării acestei clase de suprafețe biconservative cu un sistem ODE este că se poate demonstra într-un mod standard existența unei familii nenumărabile de astfel de suprafețe. Studiind acest sistem ODE, clasificăm toate suprafețele Weingarten, biconservative non-CMC care au fibratul normal plat în forme spațiale 4-dimensionale cu o direcție principală generată de gradientul curburii medii și curbura principală corespunzătoare egală cu dublul curburii medii. Mai mult, folosind o formă echivalentă a sistemului ODE obținut anterior, clasificăm toate suprafețele Weingarten, biconservative non-CMC care au fibratul normal plat în forme spațiale 4-dimensionale de curbura gaussiană constantă egală cu cea secțională a spațiului ambiant. Apoi, extindem sistemul ODE menționat anterior la cazul biarmonic și arătăm că suprafețele biconservative clasificate anterior nu sunt biarmonice.

În acest capitol prezentăm mai multe rezultate consacrate despre subvarietăți, care vor fi utilizate în capitolele următoare. Rezultatele din acest capitol nu sunt originale. În prima parte a capitolului, urmăim monografiile [8], [16], [23], [27], [28], [40], [45]. În a doua parte, reunim câteva rezultate despre subvarietăți biharmonice și biconservative, care vor fi utile ulterior.

1.1. CONVENȚII

În această teză, toate varietățile sunt presupuse a fi conexe și fără frontieră. În general, metricile din diferite fibrare vectoriale sunt notate în același mod, și anume prin $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sau, pur și simplu, nu sunt menționate explicit, contextul făcând clar la ce fibrare vectoriale ne referim. O metrică riemanniană pe fibratul tangent TM al unei varietăți M reprezintă metrica riemanniană de pe M . Conexiunea Levi-Civita a varietății riemanniene M este notată cu ∇ , iar câmpul tensorial de curbura al acesteia cu R . În această teză, subvarietățile minimale sunt, de asemenea, CMC, PMC și pseudo-umbilicale, iar subvarietățile total geodezice sunt, de asemenea, umbilicale. Pe parcursul acestei teze, notăm cu $\mathbb{S}^n(r)$ sfera euclidiană centrată în origine de dimensiune n și rază r , iar cu $\mathbb{S}^n$ sfera unitate $\mathbb{S}^n(1)$. Notăm cu $N^n(\epsilon)$ un spațiu simplu conex și complet de curbura secțională constantă ϵ , adică o formă spațială.

1.2. SUBVARIETĂȚI MINIMALE ȘI BIARMONICE

Un subiect central al Geometriei Diferențiale este cel al aplicațiilor armonice, pe care le introducem pe scurt în prima parte a acestei secțiuni.

Definiția 1.2.1. O aplicație netedă $\varphi : (M^m, g) \rightarrow (N^n, h)$ se numește *armonică* dacă este un punct critic al funcționalului de energie

$$E : C^\infty(M, N) \rightarrow \mathbb{R}, \quad E(\varphi) = \frac{1}{2} \int_M |d\varphi|^2 v_g,$$

unde $C^\infty(M, N)$ este mulțimea aplicațiilor netede între varietățile (M^m, g) și (N^n, h) .

Pentru simplitate, în Definiția 1.2.1 am presupus că varietatea M este compactă.

În 1964, J. Eells și J. H. Sampson au dedus formula primei variații a funcționalului energiei și au caracterizat aplicațiile armonice ca fiind soluțiile ecuației Euler–Lagrange asociate acesteia.

Teorema 1.2.2 ([47]). *O aplicație $\varphi : (M^m, g) \rightarrow (N^n, h)$ este armonică dacă și numai dacă câmpul tensiune*

$$\tau(\varphi) = \text{trace } \nabla d\varphi$$



se anulează.

Generalizând noțiunea de aplicație armonică, aplicațiile biarmonice sunt punctele critice ale funcționalei bienergiei. În cele ce urmează introducem definiția și câteva proprietăți care evidențiază semnificația lor geometrică.

Definiția 1.2.3. O aplicație netedă $\varphi : (M^m, g) \rightarrow (N^n, h)$ se numește *biarmonică* dacă este un punct critic al funcționalei bienergiei

$$E_2 : C^\infty(M, N) \rightarrow \mathbb{R}, \quad E_2(\varphi) = \frac{1}{2} \int_M |\tau(\varphi)|^2 v_g.$$

Din nou, pentru simplitate, în Definiția 1.2.3 am presupus că varietatea M este compactă.

Observăm că orice aplicație armonică este în mod trivial biarmonică. Numim *propriu biarmonice* acele aplicații care sunt biarmonice, dar nu armonice.

În 1986, G. Y. Jiang a dedus prima variație a funcționalei bienergiei și a caracterizat aplicațiile biarmonice ca fiind soluțiile ecuației Euler–Lagrange asociate acesteia.

Teorema 1.2.4 ([66], [67]). *O aplicație $\varphi : (M^m, g) \rightarrow (N^n, h)$ este biarmonică dacă și numai dacă câmpul tensiune*

$$\tau_2(\varphi) = -\Delta^\varphi \tau(\varphi) - \text{trace } R^N(d\varphi(\cdot), \tau(\varphi))d\varphi(\cdot)$$

se anulează.

Ecuațiile armonică și biarmonică sunt invariante la transformări omotetice ale domeniului și/sau codomeniului.

De acum înainte ne concentrăm asupra subvarietăților biarmonice, deci considerăm $\varphi : M^m \rightarrow N^n$ o imersie. După cum am menționat anterior, câmpul de tensiune al lui φ este dat de $\tau(\varphi) = mH$ și, prin urmare, φ este biharmonică dacă și numai dacă

$$\tau_2(\varphi) = -m \left(\Delta H + \text{trace } R^N(d\varphi(\cdot), H)d\varphi(\cdot) \right) = 0. \quad (1.2.1)$$

În continuare prezentăm câteva caracterizări ale subvarietăților biarmonice în forme spațiale.

Descompunând ecuația biarmonică (1.2.1) în componentele sale normale și tangențiale, se poate obține următorul rezultat.

Teorema 1.2.5 ([30], [96]). *O imersie $\varphi : M^m \rightarrow N^n(\epsilon)$ este biarmonică dacă și numai dacă*

$$2 \text{ trace } A_{\nabla_{(\cdot)}^\perp H}(\cdot) + \frac{m}{2} \text{ grad } |H|^2 = 0. \quad (1.2.2)$$

și

$$\Delta^\perp H + \text{trace } B(A_H(\cdot), (\cdot)) - m\epsilon H = 0 \quad (1.2.3)$$



În cazul hipersuprafețelor, rezultatul anterior poate fi formulat astfel

Corolarul 1.2.6 ([96]). *O imersie $\varphi : M^m \rightarrow N^{m+1}(\epsilon)$ este biarmonică dacă și numai dacă*

$$\Delta f = (m\epsilon - |A|^2) f \quad (1.2.4)$$

și

$$A(\text{grad } f) = -\frac{m}{2} f \text{ grad } f. \quad (1.2.5)$$

În cazul special al subvarietăților PMC, ecuațiile biarmonice (1.2.2) și (1.2.3) devin

Corolarul 1.2.7 ([13]). *O imersie PMC $\varphi : M^m \rightarrow N^n(\epsilon)$ este biarmonică dacă și numai dacă*

$$\text{trace } B(A_H(\cdot), (\cdot)) = m\epsilon H, \quad (1.2.6)$$

sau, echivalent,

$$\begin{cases} \langle A_H, A_\xi \rangle = 0, & \text{for any } \xi \in C(NM) \text{ with } \xi \perp H \\ |A_H|^2 = m\epsilon |H|^2 \end{cases}. \quad (1.2.7)$$

Cele mai importante exemple de hipersuprafețe propriu biarmonice în sfera euclidiană sunt prezentate în următoarele două propoziții.

Propoziția 1.2.8 ([18]). *Fie $\mathbb{S}^m(a)$ o hipersferă mică a lui $\mathbb{S}^{m+1}$, unde $0 < a < 1$. Atunci, $\mathbb{S}^m(a)$ este propriu biarmonică în $\mathbb{S}^{m+1}$ dacă și numai dacă $a = 1/\sqrt{2}$.*

Propoziția 1.2.9 ([67]). *Fie $m_1, m_2, m \in \mathbb{N}$ astfel încât $m_1 + m_2 = m$. Considerăm produsul extrinsec $\mathbb{S}^{m_1}(r_1) \times \mathbb{S}^{m_2}(r_2) \subset \mathbb{S}^{m+1}$, unde $r_1, r_2 > 0$ și $r_1^2 + r_2^2 = 1$. Atunci, $\mathbb{S}^{m_1}(r_1) \times \mathbb{S}^{m_2}(r_2)$ este propriu biarmonic în $\mathbb{S}^{m+1}$ dacă și numai dacă $r_1 = r_2 = 1/\sqrt{2}$ și $m_1 \neq m_2$.*

Generalizând cele două exemple prezentate în Propozițiile 1.2.8 și 1.2.9, obținem două mari clase de exemple de subvarietăți propriu biarmonice în sfere euclidiene. Prima clasă este dată de

Teorema 1.2.10 ([19]). *Fie M^m o subvarietate minimală într-o hipersferă mică $\mathbb{S}^n(a)$ a lui $\mathbb{S}^{n+1}$, unde $0 < a < 1$. Atunci, M este o subvarietate propriu biarmonică în $\mathbb{S}^{n+1}$ dacă și numai dacă $a = 1/\sqrt{2}$.*

În acest caz, subvarietatea M is PMC, pseudo-umbilicală, $|H| = 1$ și A_H e paralel.

A doua clasă de exemple este reprezentată de

Teorema 1.2.11 ([19]). *Fie $M_1^{m_1}, M_2^{m_2}$ două subvarietăți minimale în $\mathbb{S}^{n_1}(r_1)$ și $\mathbb{S}^{n_2}(r_2)$, respectiv, unde $r_1^2 + r_2^2 = 1$ și $n_1 + n_2 = n - 1$. Considerăm produsul extrinsec $\mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \mathbb{S}^{n_2}(r_2)$ în $\mathbb{S}^n$. Atunci, $M^m = M_1^{m_1} \times M_2^{m_2}$ este propriu biarmonică în $\mathbb{S}^n$ dacă și numai dacă $r_1 = r_2 = 1/\sqrt{2}$ și $m_1 \neq m_2$.*



O proprietate interesantă a subvarietăților biarmonice este că curbura lor medie este mărginită superior. Mai mult, dacă aceasta atinge marginea superioară, atunci subvarietatea aparține uneia dintre cele două clase de mai sus.

Teorema 1.2.12 ([9], [97]). *Fie M^m o subvarietate CMC propriu biarmonică în $\mathbb{S}^n$. Atunci, $|H| \in (0, 1]$. Mai mult, $|H| = 1$ dacă și numai dacă M este minimală în hipersfera mică $\mathbb{S}^{n-1}(1/\sqrt{2}) \subset \mathbb{S}^n$.*

1.3. SUBVARIETĂȚI BICONSERVATIVE

În cele ce urmează, prezentăm definiția și câteva proprietăți de bază ale subvarietăților biconservative, o generalizare naturală a subvarietăților biarmonice.

Fie $\varphi : M^m \rightarrow (N^n, h)$ o aplicație dată și presupunem că metrica h este fixată, iar M este compactă. Pe mulțimea $\mathcal{G}$ a tuturor metricilor definite pe M considerăm funcționala

$$\mathcal{E}_2 : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{E}_2(g) = E_2(\varphi).$$

În [76] a fost demonstrat că punctele critice ale $\mathcal{E}_2$ sunt caracterizate de anularea câmpului tensiune simetric de tip $(0, 2)$

$$\begin{aligned} S_2(X, Y) = & \frac{1}{2} |\tau(\varphi)|^2 \langle X, Y \rangle + \langle d\varphi, \nabla \tau(\varphi) \rangle \langle X, Y \rangle \\ & - \langle d\varphi(X), \nabla_Y \tau(\varphi) \rangle - \langle d\varphi(Y), \nabla_X \tau(\varphi) \rangle. \end{aligned}$$

De fapt, tensorul S_2 a fost introdus în [68] direct prin definiția de mai sus și s-a arătat că satisface

$$\operatorname{div} S_2 = -\langle \tau_2(\varphi), d\varphi \rangle.$$

Prin urmare, tensorul S_2 se numește *câmpul tensorial de stres-bienergie* a lui M pentru că se anulează când φ este o aplicație biarmonică, adică un punct critic al lui E_2 .

Dacă φ este o imersie, atunci $(\operatorname{div} S_2)^\sharp = -\tau_2(\varphi)^\top$, unde $\tau_2(\varphi)^\top$ este componenta tangentă a câmpului bitensiune.

Definiția 1.3.1 ([20]). O aplicație $\varphi : M^m \rightarrow N^n$ se numește *biconservativă* dacă $\operatorname{div} S_2 = 0$.

Propoziția 1.3.2 ([20]). *Fie $\varphi : M^m \rightarrow N^n$ o subvarietate a lui N . Atunci, M este biconservativă dacă și numai dacă componenta tangentă a câmpului bitensiune se anulează, adică $\tau_2(\varphi)^\top = 0$.*

În cazul hipersuprafețelor în forme spațiale avem următoarea caracterizare.

Propoziția 1.3.3 ([20]). *Fie $\varphi : M^m \rightarrow N^{m+1}(\epsilon)$ o hipersuprafață într-o formă spațială. Atunci, M este biconservativă dacă și numai dacă*

$$A(\operatorname{grad} f) = -\frac{m}{2} f \operatorname{grad} f. \quad (1.3.1)$$



Corolarul 1.3.4. *Orice hipersuprafață CMC într-o formă spațială este biconservativă.*

În continuare prezentăm două rezultate de rigiditate pentru hipersuprafețe compacte biconservative în forme spațiale. Menționăm că exemple de hipersuprafețe compacte ne-CMC biconservative în $\mathbb{S}^n$ au fost găsite de S. Montaldo, C. Oniciuc and A. Pampano în [79], [83].

Teorema 1.3.5 ([54]). *Fie $\varphi : M^m \rightarrow N^{m+1}(\epsilon)$ o hipersuprafață compactă ne-minimală biconservativă. Dacă $\text{Riem}^M \geq 0$ și $m \leq 10$, atunci $\nabla A = 0$ și $\varphi(M)$ este una dintre următoarele hipersuprafețe*

- a) *hipersfera euclidiană $\mathbb{S}^m(r)$ de rază $r > 0$, dacă $\epsilon \in \{-1, 0\}$, adică N este fie spațiul hiperbolic $\mathbb{H}^{m+1}$, fie spațiul euclidian $\mathbb{R}^{m+1}$;*
- b) *fie hipersfera mică $\mathbb{S}^m(r)$, $r \in (0, 1)$, fie produsul extrinsec $\mathbb{S}^{m_1}(r_1) \times \mathbb{S}^{m_2}(r_2)$, unde $r_1^2 + r_2^2 = 1$, $m_1 + m_2 = m$ și $r_1 \neq \sqrt{m_1/m}$, dacă $\epsilon = 1$, adică N este sfera euclidiană unitară $\mathbb{S}^{m+1}$.*

Teorema 1.3.6 ([52]). *Fie $\varphi : M^m \rightarrow N^{m+1}(\epsilon)$ o hipersuprafață compactă ne-minimală biconservativă. Dacă $\text{Riem}^M \geq 0$ și M are curbura scalară normalizată constantă, atunci $\nabla A = 0$ și $\varphi(M)$ este una dintre următoarele hipersuprafețe*

- a) *hipersfera euclidiană $\mathbb{S}^m(r)$ de rază $r > 0$, dacă $\epsilon \in \{-1, 0\}$, adică N este fie spațiul hiperbolic $\mathbb{H}^{m+1}$, fie spațiul euclidian $\mathbb{R}^{m+1}$;*
- b) *fie hipersfera mică $\mathbb{S}^m(r)$, $r \in (0, 1)$, fie produsul extrinsec $\mathbb{S}^{m_1}(r_1) \times \mathbb{S}^{m_2}(r_2)$, unde $r_1^2 + r_2^2 = 1$, $m_1 + m_2 = m$ și $r_1 \neq \sqrt{m_1/m}$, dacă $\epsilon = 1$, adică N este sfera euclidiană unitară $\mathbb{S}^{m+1}$.*

HIPERSUPRAFETE BIARMONICE CU CEL MULT TREI CURBURI PRINCIPALE DISTINCTE ÎN FORME SPAȚIALE

În [56], Y. Fu a demonstrat că orice hipersuprafață biarmonică M^m , $m \geq 4$, cu cel mult trei curburi principale distincte într-o formă spațială $N^{m+1}(\epsilon)$ este CMC. La finalul demonstrației sale, acesta a afirmat că un anumit polinom este nenul, lucru care se dovedește a fi fals pentru cel puțin o hipersuprafață. În acest capitol determinăm toate cazurile în care demonstrația sa eșuează și, folosind o metodă nouă care implică instrumente algebrice și programare în Mathematica, arătăm că orice hipersuprafață biarmonică având cel mult trei curburi principale distincte este CMC.

Rezultatele prezentate în acest capitol au fost publicate în [2].

Reamintim rezultatul obținut de Y. Fu privind hipersuprafețele biarmonice proprii cu cel mult trei curburi principale distincte în forme spațiale.

Teorema 2.0.1 ([56]). *Fie M^m o hipersuprafață biarmonică în $N^{m+1}(\epsilon)$, $m \geq 4$, cu cel mult trei curburi principale distincte în orice punct. Atunci, M^m este CMC.*

Când $\epsilon \leq 0$, obținem că, de fapt, M este minimală. Când $\epsilon = 1$, folosind clasificarea hipersuprafetelor isoparametrice propriu biarmonice obținută în [63], [64] putem da următorul răspuns pozitiv la Conjectura (C_2).

Corolarul 2.0.2. *Fie M^m o hipersuprafață propriu biarmonică în $\mathbb{S}^{m+1}$, $m \geq 4$, cu cel mult trei curburi principale distincte în orice punct. Atunci, M este fie un deschis al unei hipersfere mici $\mathbb{S}^m(1/\sqrt{2})$ de rază $1/\sqrt{2}$, fie un deschis al produsului extrinsec $\mathbb{S}^{m_1}(1/\sqrt{2}) \times \mathbb{S}^{m_2}(1/\sqrt{2})$, $m_1 + m_2 = m$, $m_1 \neq m_2$.*

2.1. DEMONSTRAȚIA TEOREMEI 2.0.1

Rezultatul din [56] reprezintă o generalizare la cazul $\ell \leq 3$ a unui rezultat din [9], unde ℓ este numărul de curburi principale distincte. Deși în ambele cazuri au fost utilizate ecuațiile fundamentale pentru hipersuprafețe, demonstrația din [56] este mult mai elaborată deoarece, atunci când $\ell \leq 3$ în orice punct, este mai dificil de obținut polinoamele dorite în funcție de curbura medie. Vom folosi notații similare celor din [9] pentru o comparare mai ușoară cu demonstrația noastră.

Pentru o hipersuprafață arbitrară $\varphi : M^m \rightarrow N^{m+1}(\epsilon)$, notăm prin

$$\bar{k}_1 \geq \bar{k}_2 \geq \dots \geq \bar{k}_m$$

curburile sale principale. Considerăm mulțimea M_A a tuturor punctelor din M în care numărul de curburi principale distincte este local constant. Pe orice componentă conexă a lui M_A , curburile principale sunt netede, iar operatorul A este diagonalizabil local în mod neted.



Vom arăta că $\text{grad } f = 0$ pe fiecare componentă conexă a lui M_A și deci pe M_A . Din densitatea lui M_A , rezultă că $\text{grad } f = 0$ pe M , adică f este constantă.

Considerăm o componentă conexă arbitrară a lui M_A . Deoarece M are cel mult trei curburi principale distincte, pe această componentă avem: fie fiecare punct este umbilical, fie fiecare punct are exact două curburi principale distincte, fie fiecare punct are exact trei curburi principale distincte. Pentru simplitate, notăm prin M componenta conexă aleasă.

Dacă M este umbilicală sau dacă M are exact două curburi principale distincte în orice punct, atunci rezultatul este deja demonstrat (vezi [9]).

Presupunem acum că M are exact trei curburi principale distincte în orice punct. În acest caz, operatorul A este (local) diagonalizabil în raport cu un câmp de baze ortonormate $E_1, \dots, E_m$, astfel încât $A(E_i) = \bar{k}_i E_i$, pentru orice $i \in \overline{1, m}$.

Observăm că ipoteza de a avea cel mult trei curburi principale distincte în orice punct al lui M nu poate fi relaxată astfel încât să fie valabilă în orice punct al lui M_A . Dacă acest lucru ar fi posibil, atunci ar exista un punct $p_0 \in M \setminus M_A$ cu $\ell_0 > 3$ curburi principale distincte. Astfel, există o vecinătate deschisă U_0 a lui p_0 formată din puncte cu cel puțin ℓ_0 curburi principale distincte. Deoarece M_A este deschisă și densă în M , avem $M_A \cap U_0 \neq \emptyset$, deci există un punct care are cel mult trei curburi principale distincte și, în același timp, cel puțin ℓ_0 curburi principale distincte, contradicție.

Presupunem, prin reducere la absurd, că $\text{grad } f \neq 0$ și, la finalul demonstrației, vom obține o contradicție. Dacă este necesar, ne putem restrânge la o submulțime deschisă, notată de asemenea (pentru simplitate) prin M , și putem presupune că $\text{grad } f \neq 0$ în orice punct al lui M . Printr-un argument similar, putem presupune că $f = |H| > 0$ pe M .

Notăm prin $\mathcal{D}$ distribuția ortogonală celei determinate de $\text{grad } f$. Se știe că $\mathcal{D}$ este complet integrabilă.”

În continuare, pentru orice $p \in M$ notăm

$$\begin{aligned} k_1(p) &= \bar{k}_1(p) = \dots = \bar{k}_{m_1}(p) \\ k_2(p) &= \bar{k}_{m_1+1}(p) = \dots = \bar{k}_{m_1+m_2}(p) \\ k_3(p) &= \bar{k}_{m_1+m_2+1}(p) = \dots = \bar{k}_{m_1+m_2+m_3}(p) \end{aligned}$$

curburile principale distincte în punctul p , unde $m_1 + m_2 + m_3 = m$. Multiplicitățile m_1, m_2, m_3 sunt funcții constante pe M .

Din partea normală a ecuației biarmonice (1.2.5) putem considera

$$k_1 = -\frac{m}{2}f \quad \text{and} \quad E_1 = \frac{\text{grad } f}{|\text{grad } f|}$$

pe M .

În prima parte a demonstrației vom încerca să obținem cât mai multe informații doar din partea tangentă a ecuației biarmonice.

Remarcăm că

$$E_1(k_1) = -\frac{m}{2}E_1(f) = -\frac{m}{2}|\text{grad } f| \neq 0$$



în orice punct al lui M .

Menționăm că toate formulele următoare au loc pe M , dacă nu este precizat altfel.

Din definiția lui E_1 obținem de asemenea că pentru orice $i \in \overline{2, m}$,

$$E_i(f) = 0.$$

Se știe că $m_1 = 1$. Notăm $r = 1 + m_2$ și obținem

$$k_2(p) = \bar{k}_2(p) = \dots = \bar{k}_r(p)$$

și

$$k_3(p) = \bar{k}_{r+1}(p) = \dots = \bar{k}_m(p).$$

Multiplicitățile lui k_2 și k_3 sunt $r - 1$ și $m - r$, respectiv. După o eventuală reordonare, putem presupune că $m_2 \geq m_3$ și deci $(m + 1)/2 \leq r < m$.

Din definiția curburii medii avem

$$mf = \text{trace } A = -\frac{m}{2}f + (r - 1)k_2 + (m - r)k_3,$$

deci

$$k_3 = \frac{3m}{2(m - r)}f - \frac{r - 1}{m - r}k_2. \quad (2.1.1)$$

Folosind faptul că $k_2 \neq k_1$, $k_3 \neq k_1$ și $k_3 \neq k_2$, obținem

$$k_2 \neq -\frac{m}{2}f, \quad k_2 \neq \frac{m(m - r + 3)}{2(r - 1)}f \quad \text{and} \quad k_2 \neq \frac{3m}{2(m - 1)}f \quad (2.1.2)$$

în fiecare punct al lui M .

Scopul nostru este să găsim două polinoame în variabilele f și k_2 care au soluții comune. Prin urmare, rezultanta lor trebuie să se anuleze. Se dovedește că rezultanta este o ecuație polinomială în f și, prin continuitate, f trebuie să fie constantă, ceea ce contrazice faptul că $\text{grad } f \neq 0$.

Folosind partea normală și partea tangentă a ecuației biarmonice și faptul că $m \geq 4$, arătăm că funcțiile k_2 și k_3 sunt constante în lungul foilor lui $\mathcal{D}$.

Lema 2.1.1. *Avem $E_i(k_2) = E_i(k_3) = 0$, pentru orice $i \in \overline{2, m}$.*

Notăm

$$\Omega = \frac{E_1(k_2)}{k_1 - k_2} \quad \text{și} \quad \Theta = \frac{E_1(k_3)}{k_1 - k_3}. \quad (2.1.3)$$

Folosim ecuația lui Gauss și partea tangentă a ecuației biarmonice pentru a obține unele relații pe care Ω și Θ trebuie să le satisfacă.

Lema 2.1.2. *Au loc următoarele relații*

$$E_1(\Omega) + \Omega^2 = -\epsilon - k_1k_2, \quad (2.1.4)$$



$$E_1(\Theta) + \Theta^2 = -\epsilon - k_1 k_3, \quad (2.1.5)$$

$$\Omega\Theta = -\epsilon - k_2 k_3, \quad (2.1.6)$$

$$E_1(E_1(k_2)) + 2\Omega E_1(k_2) - \Omega E_1(k_1) + (k_1 k_2 + \epsilon)(k_1 - k_2) = 0, \quad (2.1.7)$$

$$E_1(E_1(k_3)) + 2\Theta E_1(k_3) - \Theta E_1(k_1) + (k_1 k_3 + \epsilon)(k_1 - k_3) = 0. \quad (2.1.8)$$

În continuare, folosim partea normală a ecuației biarmonice pentru a obține o altă relație între Ω și Θ .

Lema 2.1.3. *Are loc următoarea relație*

$$\begin{aligned} & -E_1(E_1(f)) - ((r-1)\Omega + (m-r)\Theta) E_1(f) \\ & + \left(k_1^2 + (r-1)k_2^2 + (m-r)k_3^2 \right) f = m\epsilon f. \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

O consecință a (2.1.7), (2.1.8) și (2.1.9) este

Lema 2.1.4. *Are loc următoarea formulă*

$$\begin{aligned} & \left((4-r)\Omega + (r-m+3)\Theta \right) E_1(f) + \frac{3m^2(m-r+6)}{4(m-r)} f^3 \\ & - \frac{3m(m+4r-2)}{2(m-r)} f^2 k_2 + \frac{3m(r-1)}{m-r} f k_2^2 - 3(m+1)\epsilon f = 0. \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

Observăm că (2.1.10) se anulează identic când $m = 7$, $r = 4$ și $\delta = 0$, unde

$$\delta = 28k_2^2 - 98fk_2 + 147f^2 - 32\epsilon.$$

În acest caz special, (2.1.9) este doar o consecință a relațiilor (2.1.4) și (2.1.5) și, prin urmare, nu este necesar să folosim partea normală a ecuației biarmonice în Lema 2.1.3. De asemenea, deoarece $m - r > 1$, nu avem nevoie de partea normală în Lema 2.1.1. Mai mult, relațiile deduse din (2.1.10) nu pot furniza informații noi. Acest caz special va apărea în mod natural în analiza noastră la finalul demonstrației.

Deoarece $\delta = 0$ este echivalent cu $14|A|^2 - 245f^2 - 96\epsilon = 0$, putem enunța:

Propoziția 2.1.5. *Fie M^7 o hipersuprafață biconservativă în $N^8(\epsilon)$, cu $\text{grad } f \neq 0$ în fiecare punct al lui M . Presupunem că M are trei curburi principale distincte cu multiplicitățile $m_1 = 1$, $m_2 = 3$, $m_3 = 3$. Atunci, următoarea relație*

$$14|A|^2 - 245f^2 - 96\epsilon = 0$$

nu poate avea loc pe un deschis al lui M .

Folosind partea tangentă și partea normală a ecuației biarmonice, obținem mai multe proprietăți ale funcțiilor Ω și Θ .



Lema 2.1.6. *Funcțiile Ω și Θ satisfac*

$$(r-1)(4-r)(mf+2k_2)\Omega^2 + (3+r-m)(m(m-r+3)f-2(r-1)k_2)\Theta^2 = R, \quad (2.1.11)$$

și

$$P\Omega + Q\Theta = 0, \quad (2.1.12)$$

unde P , Q și R sunt expresii polinomiale în variabilele f și k_2 cu coeficienți care depind de m , r și ϵ .

Înmulțind (2.1.11) cu PQ și folosind (2.1.6), (2.1.12), obținem o relație fără nicio derivată

$$\sum_{i=0}^9 a_{i,9-i} k_2^i f^{9-i} + \epsilon \left(\sum_{i=0}^7 a_{i,7-i} k_2^i f^{7-i} + \sum_{i=0}^5 a_{i,5-i} k_2^i f^{5-i} + \sum_{i=0}^3 a_{i,3-i} k_2^i f^{3-i} \right) = 0, \quad (2.1.13)$$

unde coeficienții a_{ij} depind de m , r și ϵ , deci sunt constanți.

Se arată ușor că pentru orice m , r și ϵ

$$a_{0,9} = \frac{729m^9(2m-2r+3)(3m-2r+17)(m-r+6)}{32(m-r)} > 0,$$

$$a_{9,0} = 0.$$

Prin urmare, partea stângă din (2.1.13) este un polinom nenul în f și k_2 , obținut folosind atât partea normală, cât și partea tangentă a ecuației biarmonice. Ecuația (2.1.13) reprezintă relația cheie a demonstrației noastre.

Dacă k_2 este constantă pe M , atunci, din (2.1.13), obținem un polinom de gradul 9 în variabila f , cu coeficienți constanți, deci f este constantă pe M , contradicție.

Vom presupune că k_2 nu este constantă pe M . Restrângând, dacă este necesar, mulțimea M , putem presupune că $\text{grad } k_2 \neq 0$ și $k_2 \neq 0$ în orice punct al lui M . Din faptul că

$$\text{grad } k_2 = E_1(k_2)E_1 \neq 0$$

rezultă $E_1(k_2) \neq 0$ în orice punct al lui M . Prin urmare, $\Omega \neq 0$ în orice punct al lui M .

Fie $\gamma : I \rightarrow M$ o curbă integrală a lui E_1 , $\gamma = \gamma(t)$.

Lema 2.1.7. *În lungul lui γ , raportul k_2/f nu poate fi constant.*

După cum am menționat anterior, ecuația polinomială (2.1.13) joacă un rol important în demonstrația noastră și observăm că atunci când $\epsilon = 0$ aceasta devine o ecuație polinomială omogenă de grad 9. Prin urmare, vom împărți analiza în două cazuri.

Cazul 1: $\epsilon = 0$.



Relația (2.1.13) devine

$$\sum_{i=0}^9 a_{i,9-i} k_2^i f^{9-i} = 0.$$

Folosind faptul că $f > 0$, putem împărți la și obținem

$$\sum_{i=0}^9 a_{i,9-i} \left(\frac{k_2}{f} \right)^i = 0.$$

Prin urmare, obținem o ecuație polinomială în variabila $z = k_2/f$ cu coeficienți constanți. Am văzut că $a_{9,0}$ este diferit de zero și nu depinde de ϵ , deci acest polinom este diferit de polinomul nul, iar aceasta implică faptul că z este constant, ceea ce contrazice Lema 2.1.7.

Cazul 2: $\epsilon \neq 0$.

În lungul lui γ avem

$$k_2'(t) = (E_1(k_2))(\gamma(t)) \neq 0, \quad \text{pentru orice } t \in I,$$

unde $k_2 := k_2 \circ \gamma$. În acest caz $t \mapsto k_2(t)$ este un difeomorfism și $t = t(k_2)$.

În continuare notăm

$$f(t) = (f \circ \gamma)(t), \quad \tilde{f}(k_2) = f(t(k_2)) \quad \text{și} \quad \tilde{\gamma}(k_2) = \gamma(t(k_2)).$$

O consecință directă a Lemei 2.1.7 este

Observația 2.1.8. În lungul lui $\tilde{\gamma}$, raportul $k_2/\tilde{f}$ nu poate fi constant.

Lema 2.1.9. În lungul lui $\tilde{\gamma}$, $\tilde{Q} = Q \circ \tilde{\gamma}$ nu se anulează.

Putem exprima derivata lui $\tilde{f}$ în raport cu k_2 ca o relație rațională în $\tilde{f}$ și k_2 .

Lema 2.1.10. În lungul lui $\tilde{\gamma}$ derivata lui $\tilde{f}$ în raport cu k_2 este

$$\frac{d\tilde{f}}{dk_2} = \frac{2(r-1)}{3m} - \frac{2(m(m-r+3)\tilde{f} - 2(r-1)k_2)\tilde{P}}{3m(m\tilde{f} + 2k_2)\tilde{Q}}. \quad (2.1.14)$$

Luând în considerare Lema 2.1.9, putem restrânge $\tilde{\gamma}$, dacă este necesar, și presupune că $\tilde{Q}(k_2) \neq 0$ pentru orice k_2 .

Pentru a obține o altă relație cheie pentru demonstrația noastră, derivăm primul polinom dat de (2.1.13) în raport cu k_2 în lungul lui $\tilde{\gamma}$ și înlocuind derivata lui $\tilde{f}$ în raport cu k_2 din Lema 2.1.10, obținem

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{12} b_{i,12-i} k_2^i \tilde{f}^{12-i} + \epsilon \left(\sum_{i=0}^{10} b_{i,10-i} k_2^i \tilde{f}^{10-i} + \sum_{i=0}^8 b_{i,8-i} k_2^i \tilde{f}^{8-i} \right. \\ \left. + \sum_{i=0}^6 b_{i,6-i} k_2^i \tilde{f}^{6-i} + \sum_{i=0}^4 b_{i,4-i} k_2^i \tilde{f}^{4-i} \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.1.15)$$



unde coeficienții b_{ij} depind de m , r și ϵ și sunt constanți.

Relațiile (2.1.13) și (2.1.15) pot fi privite ca două ecuații polinomiale în k_2 , cu coeficienți care depind de funcția $\tilde{f} = \tilde{f}(k_2)$. La fel ca în demonstrația Lemei 2.1.9, putem calcula rezultanta celor două polinoame și, în final, putem obține un polinom în $\tilde{f}$ cu coeficienți constanți. Dacă acest polinom este nenul, atunci obținem o contradicție și încheiem demonstrația.

Deoarece derivata lui $\tilde{f}$ în raport cu k_2 este diferită de zero, pentru orice k_2 , putem schimba punctul de vedere, iar (2.1.13) împreună cu (2.1.15) pot fi considerate ca două ecuații polinomiale în $\tilde{f}$, cu coeficienți care depind de funcția $\tilde{k}_2 = \tilde{k}_2(\tilde{f})$. Așa cum am descris mai sus, putem calcula rezultanta acestor noi polinoame, obținând un polinom în $\tilde{k}_2$ cu coeficienți constanți. Din nou, dacă acest polinom este nenul, atunci obținem o contradicție.

Deoarece volumul de calcule este foarte mare, nu am putut calcula rezultanta pentru ϵ , m și r generice. Din acest motiv, am realizat un program în Mathematica care calculează rezultanta pentru orice alegere particulară a lui ϵ , m și r .

În prima situație, când rezultanta este un polinom în $\tilde{f}$, obținem că, pentru orice $\epsilon \neq 0$, $m \in \overline{4, 30}$ și toate valorile posibile ale lui r , singurul caz în care rezultanta este polinomul nul este dat de

$$m = 7 \quad \text{și} \quad r = 4.$$

În a doua situație, când rezultanta este un polinom în k_2 , rezultanta (care ar trebui să fie un polinom în k_2) este polinomul nul pentru orice $\epsilon \neq 0$, $m \in \overline{4, 30}$ și pentru toate valorile posibile ale lui r .

Pentru a reduce volumul de calcule și pentru a putea calcula rezultanta în cazul generic, vom reduce gradul polinoamelor din (2.1.13) și (2.1.15). Astfel, împărțim (2.1.13) prin $\tilde{f}^3$ și (2.1.15) prin $\tilde{f}^4$, iar notând $\tilde{z} = k_2/\tilde{f}$, obținem

$$\sum_{i=0}^9 a_{i,9-i} \tilde{z}^i \tilde{f}^6 + \epsilon \left(\sum_{i=0}^7 a_{i,7-i} \tilde{z}^i \tilde{f}^4 + \sum_{i=0}^5 a_{i,5-i} \tilde{z}^i \tilde{f}^2 + \sum_{i=0}^3 a_{i,3-i} \tilde{z}^i \right) = 0 \quad (2.1.16)$$

și

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{12} b_{i,12-i} \tilde{z}^i \tilde{f}^8 + \epsilon \left(\sum_{i=0}^{10} b_{i,10-i} \tilde{z}^i \tilde{f}^6 + \sum_{i=0}^8 b_{i,8-i} \tilde{z}^i \tilde{f}^4 \right. \\ \left. + \sum_{i=0}^6 b_{i,6-i} \tilde{z}^i \tilde{f}^2 + \sum_{i=0}^4 b_{i,4-i} \tilde{z}^i \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

Folosind Mathematica putem calcula rezultanta acestor polinoame în cazul general și demonstra că aceasta se anulează doar când $m = 7$ și $r = 4$.



Subcazul 2.1: $\epsilon \neq 0$, $m = 7$ și $r = 4$.

În acest caz ecuațiile (2.1.13) și (2.1.15) devin

$$\begin{aligned} & \frac{45927}{16} (32\epsilon - 147\tilde{f}^2 + 98\tilde{f}k_2 - 28k_2^2) \\ & \times (336\epsilon\tilde{f} - 1715\tilde{f}^3 - 32\epsilon k_2 + 1470\tilde{f}^2k_2 - 294\tilde{f}k_2^2 + 28k_2^3) \\ & \times (32\epsilon(7\tilde{f} + k_2) + 7(147\tilde{f}^3 - 63\tilde{f}^2k_2 - 4k_2^3)) = 0 \end{aligned} \quad (2.1.18)$$

și

$$\begin{aligned} & \frac{1240029}{16} (7\tilde{f} - 4k_2) (32\epsilon - 147\tilde{f}^2 + 98\tilde{f}k_2 - 28k_2^2) \\ & \times [81920\epsilon^3 (343\tilde{f}^2 + 7\tilde{f}k_2 - 2k_2^2) - 7168\epsilon^2 (66542\tilde{f}^4 \\ & - 12201\tilde{f}^3k_2 + 2653\tilde{f}^2k_2^2 + 476\tilde{f}k_2^3 - 68k_2^4) \\ & - 784\epsilon (2384193\tilde{f}^6 - 1172717\tilde{f}^5k_2 + 559384\tilde{f}^4k_2^2 \\ & - 154252\tilde{f}^3k_2^3 + 40656\tilde{f}^2k_2^4 - 6384\tilde{f}k_2^5 + 608k_2^6) \\ & + 2401 (6950895\tilde{f}^8 - 10169607\tilde{f}^7k_2 + 5436942\tilde{f}^6k_2^2 \\ & - 1685894\tilde{f}^5k_2^3 + 421456\tilde{f}^4k_2^4 - 69608\tilde{f}^3k_2^5 \\ & + 10288\tilde{f}^2k_2^6 - 896\tilde{f}k_2^7 + 64k_2^8)] = 0, \end{aligned} \quad (2.1.19)$$

respectiv.

Se observă că din (2.1.18) și (2.1.19) că polinomul $\delta = 28k_2^2 - 98\tilde{f}k_2 + 147\tilde{f}^2 - 32\epsilon$ este singurul factor comun. Conica $\delta = 0$ este o elipsă când $\epsilon > 0$ și o elipsă imaginară când $\epsilon < 0$.

Pe de altă parte, din (2.1.10) obținem că $\delta = 0$. Deci, după cum am menționat anterior, acest caz este reprezentat de Propoziția 2.1.5.

Folosind faptul că $\delta = 0$, obținem

$$\begin{aligned} & 14386462720 \times \epsilon^4 f - 356598824960 \times \epsilon^3 f^3 - 2331746708480 \times \epsilon^2 f^5 \\ & + 42758681977200 \times \epsilon f^7 + 151265495839500 f^9 = 0. \end{aligned}$$

Acesta este o ecuație polinomială de grad 9 în variabila f cu coeficienți constanți, ceea ce reprezintă o contradicție.

REZULTATE DE TIP GAP PENTRU SUBVARIETĂȚI BIARMONICE ÎN SFERE EUCLIDIENE

În acest capitol, studiem o clasă particulară de subvarietăți biarmonice proprii în sfere și dorim să vedem când acestea aparțin uneia dintre cele două clase de subvarietăți biarmonice prezentate în Teoremele 1.2.10 și 1.2.11.

Pentru aceasta considerăm $\varphi_1 : M_1^{m_1} \rightarrow \mathbb{S}^{n_1}(r_1)$, $\varphi_2 : M_2^{m_2} \rightarrow \mathbb{S}^{n_2}(r_2)$ două imersii și $\iota : \mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \mathbb{S}^{n_2}(r_2) \rightarrow \mathbb{S}^n$ incluziunea canonică. Dorim să vedem când compunerea $\iota \circ (\varphi_1 \times \varphi_2) : M = M_1 \times M_2 \rightarrow \mathbb{S}^n$ aparține uneia dintre cele două clase de exemple menționate mai sus. Cu alte cuvinte, dorim să vedem când există o altă descompunere (intrinsecă) a lui M ca $M = \tilde{M}_1 \times \tilde{M}_2$ și o altă descompunere a lui $\mathbb{R}^{n+1}$ astfel încât, până la izometrii ale lui $\mathbb{R}^{n+1}$, să avem $\iota \circ (\varphi_1 \times \varphi_2) = \iota \circ (\tilde{\varphi}_1 \times \tilde{\varphi}_2)$, cu $\tilde{\varphi}_1$ și $\tilde{\varphi}_2$ imersii minimale în anumite sfere de rază $1/\sqrt{2}$.

Observăm că fiecare imersie φ_i satisface o ecuație de tipul $\tau_2(\varphi_i) = \lambda_i \tau(\varphi_i)$, $i \in 1, 2$, cu $\lambda_1 \lambda_2 < 0$. Prin urmare, pentru a răspunde întrebării noastre privind obținerea unei alte descompuneri a lui M , vom studia așa-numitele subvarietăți λ -biharmonice.

Rezultatele prezentate în acest capitol au fost publicate în [5].

3.1. SUBVARIETĂȚI λ -BIARMONICE

În această secțiune vom prezenta câteva rezultate de caracterizare ale subvarietăților λ -biharmonice, care vor fi utile ulterior.

Știm că ecuația $\tau_2(\varphi) = \lambda \tau(\varphi)$ a apărut deja în literatură (a se vedea, de exemplu, [6], [17], [30], [50]), însă nu a fost studiată în contextul nostru al subvarietăților din sfere euclidiene. Aceste subvarietăți au atras un interes semnificativ datorită proprietăților lor geometrice și potențialelor aplicații. De la studiul lor inițial în anii '90, subvarietățile λ -biharmonice continuă să reprezinte un subiect important de cercetare.

Similar Teoremei 1.2.5, se poate demonstra că

Teorema 3.1.1. *O imersie $\varphi : M^m \rightarrow \mathbb{S}^n(r)$ este λ -biharmonică dacă și numai dacă*

$$\begin{cases} \Delta^\perp H + \text{trace } B(\cdot, A_H(\cdot)) + \left(\lambda - \frac{m}{r^2}\right) H = 0 \\ 4 \text{ trace } A_{\nabla_{(\cdot)}^\perp H}(\cdot) + m \text{ grad } |H|^2 = 0 \end{cases} \quad (3.1.1)$$

În cazul hipersuprafețelor, rezultatul anterior poate fi enunțat în funcție de curbura medie f după cum urmează.

Corolarul 3.1.2. *Fie M^m o hipersuprafață în $\mathbb{S}^{m+1}(r)$, sfera de rază r . Atunci,*



M este λ -biarmonică în $\mathbb{S}^{m+1}(r)$ dacă și numai dacă

$$\begin{cases} \Delta f = \left(\frac{m}{r^2} - \lambda - |A|^2\right) f \\ A(\text{grad } f) = -\frac{m}{2} f \text{ grad } f \end{cases}.$$

Mai mult, dacă M este o hipersuprafață ne-minimală CMC, atunci M este propriu λ -biarmonic în $\mathbb{S}^{m+1}(r)$ dacă și numai dacă

$$\lambda < \frac{m}{r^2} \quad \text{și} \quad |A|^2 = \frac{m}{r^2} - \lambda. \quad (3.1.2)$$

În cazul special al subvarietăților PMC, se obține o forma mai simplă a Teoremei 3.1.1.

Corolarul 3.1.3. Fie M^m o subvarietate PMC în $\mathbb{S}^n(r)$. Atunci, M este λ -biarmonic în $\mathbb{S}^n(r)$ dacă și numai dacă

$$\text{trace } B(\cdot, A_H(\cdot)) = \left(\frac{m}{r^2} - \lambda\right) H \quad (3.1.3)$$

sau, echivalent,

$$\begin{cases} |A_H|^2 = \left(\frac{m}{r^2} - \lambda\right) |H|^2 \\ \langle A_H, A_\xi \rangle = 0, \quad \text{for any } \xi \in C(NM) \text{ and } \xi \perp H \end{cases}. \quad (3.1.4)$$

3.1.1. EXEMPLE DE HIPERSUPRAFETE λ -BIARMONICE

În continuare vom prezenta câteva exemple simple de hipersuprafețe λ -biarmonice în $\mathbb{S}^n(r)$ care vor fi utile în studiul nostru. Prima propoziție oferă exemple de hipersuprafețe λ -biarmonice care sunt umbilicale în sfere.

Propoziția 3.1.4. Fie $\mathbb{S}^m(a)$ o hipersferă mică a lui $\mathbb{S}^{m+1}(r)$ și considerăm $\iota : \mathbb{S}^m(a) \rightarrow \mathbb{S}^{m+1}(r)$ incluziunea canonică. Atunci, $\mathbb{S}^m(a)$ este propriu λ -biarmonică în $\mathbb{S}^{m+1}(r)$ dacă și numai dacă $\lambda < m/r^2$ și

$$a = \sqrt{\frac{mr^2}{2m - \lambda r^2}}.$$

Mai mult, în acest caz $|H|^2 = 1/r^2 - \lambda/m$.

Următorul rezultat oferă exemple de hipersuprafețe CMC λ -biarmonice în sfere care au două curburi distincte constante (A este din nou paralel).

Propoziția 3.1.5. Considerăm $\iota : \mathbb{S}^{m-1}(r_1) \times \mathbb{S}^1(r_2) \rightarrow \mathbb{S}^{m+1}(r)$ incluziunea canonică a unui produs extrinsec, unde $r_1^2 + r_2^2 = r^2$, $r_1, r_2 \in (0, r)$ și $m \geq 2$. Atunci, ι este propriu λ -biarmonică dacă și numai dacă unul dintre următoarele trei cazuri are loc



a) $m > 2$, $\lambda = (m - 2\sqrt{m-1})/r^2$ și

$$r_1^2 = \frac{m-1-\sqrt{m-1}}{m-2}r^2, \quad r_2^2 = \frac{\sqrt{m-1}-1}{m-2}r^2;$$

b) $m \geq 2$, $\lambda < (m - 2\sqrt{m-1})/r^2$, $\lambda \neq 0$ și

$$r_1^2 = \frac{3m-2-\lambda r^2 \mp \sqrt{(m-\lambda r^2)^2 - 4(m-1)}}{2(2m-\lambda r^2)}r^2,$$

$$r_2^2 = \frac{m+2-\lambda r^2 \pm \sqrt{(m-\lambda r^2)^2 - 4(m-1)}}{2(2m-\lambda r^2)}r^2;$$

c) sau $m > 2$, $\lambda = 0$ și $r_1^2 = r_2^2 = r^2/2$.

3.1.2. PROPRIETĂȚI ALE SUBVARIETĂȚILOR PMC λ -BIARMONICE

În cazul mai general al subvarietăților CMC, avem următoarea proprietate privind imaginea curburii medii a subvarietăților λ -biarmonice. Următoarea teoremă este o generalizare a Teoremei 1.2.12.

Teorema 3.1.6. *Fie $\varphi : M^m \rightarrow \mathbb{S}^n(r)$ o imersie CMC propriu λ -biarmonică. Atunci, $\lambda < m/r^2$ și $|H| \in (0, \sqrt{1/r^2 - \lambda/m}]$. Mai mult, $|H| = \sqrt{1/r^2 - \lambda/m}$ dacă și numai dacă M este minimală într-o hipersferă mică $\mathbb{S}^{n-1}(\sqrt{mr^2/(2m-\lambda r^2)}) \subset \mathbb{S}^n(r)$.*

Următoarea teoremă clasifică subvarietățile propriu λ -biarmonice în sfere care stau în hipersfere mici ale imaginii.

Teorema 3.1.7. *Fie $\varphi : M^m \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}(a)$ o imersie a unei hipersfere mici a lui $\mathbb{S}^n(r)$, $a \in (0, r)$ și fie $\iota : \mathbb{S}^{n-1}(a) \rightarrow \mathbb{S}^n(r)$ incluziunea canonică, unde $a^2 + b^2 = r^2$ și $a > 0$. Atunci, M este propriu λ -biarmonică în $\mathbb{S}^n(r)$ dacă și numai dacă fie $a^2 = mr^2/(2m - \lambda r^2)$ și M este minimală în $\mathbb{S}^{n-1}(\sqrt{mr^2/(2m - \lambda r^2)})$, fie $a^2 > mr^2/(2m - \lambda r^2)$ și M este minimală într-o hipersferă mică $\mathbb{S}^{n-2}(\sqrt{mr^2/(2m - \lambda r^2)})$ a lui $\mathbb{S}^{n-1}(a)$. În ambele cazuri,*

$$|H^{\iota \circ \varphi}|^2 = \frac{1}{r^2} - \frac{\lambda}{m}$$

și în cel din urmă avem un rezultat de reducere a codimensiunii, adică M stă într-o hipersferă total geodezică $\mathbb{S}^{n-2}(\sqrt{mr^2/(2m - \lambda r^2)}) \subset \mathbb{S}^{n-1}(r) \subset \mathbb{S}^n(r)$.

Atunci când subvarietatea este PMC, putem demonstra că imaginea curburii medii este mai mică. Mai precis, putem arăta că, pentru subvarietăți PMC propriu



λ -biarmonice, există un gap în intervalul din Teorema 3.1.6, în care se află $|H|$, a se vedea Teorema 3.1.9.

Pentru a obține acest rezultat, definim câmpul tensorial simetric de tip $(1, 1)$

$$\Phi = A_H - |H|^2 \text{Id},$$

unde Id este identitatea lui $C(TM)$. Se poate arăta că $\text{trace } \Phi = 0$ și $|\Phi|^2 = |A_H|^2 - m|H|^4$.

De acum vom presupune că dimensiunea m a lui M este mai mare sau egală decât 2. Cazul $m = 2$ va fi studiat la finalul acestui capitol.

Lema 3.1.8. *Fie $\varphi : M^m \rightarrow \mathbb{S}^n(r)$ o subvarietate ne-minimală. Dacă M este PMC și $A_H \perp A_{\eta_a}$, pentru orice $a \in \overline{1, k}$, atunci*

$$-\frac{1}{2}\Delta|\Phi|^2 = \left(\frac{m}{r^2} + m|H|^2 - \frac{|\Phi|^2}{|H|^2} \right) |\Phi|^2 + m \text{trace } \Phi^3 + |\nabla \Phi|^2.$$

Acum putem enunța rezultatul principal al acestei secțiuni.

Teorema 3.1.9. *Fie $\varphi : M^m \rightarrow \mathbb{S}^n(r)$ o imersie PMC propriu λ -biarmonică. Presupunem că $m > 2$ și $|H|^2 \in (0, 1/r^2 - \lambda/m)$. Atunci,*

$$\lambda \leq \frac{m - 2\sqrt{m-1}}{r^2}$$

și

$$|H|^2 \in \begin{cases} (0, x_2], & \text{if } \lambda \leq 0 \\ [x_1, x_2], & \text{if } \lambda \in \left(0, \frac{m-2\sqrt{m-1}}{r^2}\right) \\ \{x_2\}, & \text{if } \lambda = \frac{m-2\sqrt{m-1}}{r^2} \end{cases},$$

unde x_1 și x_2 sunt soluțiile pozitive ale următoarei ecuații de gradul al doilea

$$m^4 x^2 + m^2 \left(m\lambda - \frac{(m-2)^2}{r^2} \right) x + (m-1)\lambda^2 = 0.$$

Mai mult, avem

- a) $|H|^2 = x_2$ dacă și numai dacă local $M = L \times I$, $\varphi = \varphi_1 \times \varphi_2$ este un produs extrinsec, $\varphi_1 : L \rightarrow \mathbb{S}^{n-2}(r_1)$ este minimală și $\varphi_2 : I \rightarrow \mathbb{S}^1(r_2)$ este (un deschis din) cercul parametrizat prin lungime de arc, unde $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$ și razele sunt date de

$$\begin{cases} r_1^2 = \frac{3m-2-\lambda r^2 - \sqrt{(m-\lambda r^2)^2 - 4(m-1)}}{2(2m-\lambda r^2)} r^2 \\ r_2^2 = \frac{m+2-\lambda r^2 + \sqrt{(m-\lambda r^2)^2 - 4(m-1)}}{2(2m-\lambda r^2)} r^2 \end{cases}. \quad (3.1.5)$$

Dacă M este complet și simplu conex, descompunerile anterioare ale lui M și φ au loc global, adică $M = L \times \mathbb{R}$ și $\varphi_2(\mathbb{R}) = \mathbb{S}^1(r_2)$.



- b) dacă $\lambda > 0$, atunci $|H|^2 = x_1$ dacă și numai dacă local $M = L \times I$, $\varphi = \varphi_1 \times \varphi_2$ este un produs extrinsec, $\varphi_1 : L \rightarrow \mathbb{S}^{n-2}(r_1)$ este minimală și $\varphi_2 : I \rightarrow \mathbb{S}^1(r_2)$ este (un deschis din) cercul parametrizat prin lungime de arc, unde $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$ și razele sunt date de

$$\begin{cases} r_1^2 = \frac{3m - 2 - \lambda r^2 + \sqrt{(m - \lambda r^2)^2 - 4(m - 1)}}{2(2m - \lambda r^2)} r^2 \\ r_2^2 = \frac{m + 2 - \lambda r^2 - \sqrt{(m - \lambda r^2)^2 - 4(m - 1)}}{2(2m - \lambda r^2)} r^2 \end{cases}. \quad (3.1.6)$$

Dacă M este complet și simplu conex, descompunerile anterioare ale lui M și φ au loc global, adică $M = L \times \mathbb{R}$ și $\varphi_2(\mathbb{R}) = \mathbb{S}^1(r_2)$.

3.2. SUBVARIETĂȚI BIARMONICE DE TIP PRODUS

Acum revenim la obiectivul principal al acestui capitol, și anume găsirea unui gap mai mare pentru curbura medie al anumitor subvarietăți PMC biarmonice, și considerăm două imersii ne-minimale $\varphi_1 : M_1^{m_1} \rightarrow \mathbb{S}^{n_1}(r_1)$, $m_1 > 2$, și $\varphi_2 : M_2^{m_2} \rightarrow \mathbb{S}^{n_2}(r_2)$, $m_2 > 2$, astfel încât produsul extrinsec $M^m = M_1^{m_1} \times M_2^{m_2}$ să fie propriu biarmonic în $\mathbb{S}^n$, adică $\iota \circ \varphi = \iota \circ (\varphi_1 \times \varphi_2)$ este o imersie propriu biarmonică, unde ι este incluziunea canonică a lui $\mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \mathbb{S}^{n_2}(r_2)$ în $\mathbb{S}^n$ și $n_1 + n_2 = n - 1$.

Știm că M_1 și M_2 trebuie să fie CMC, $\lambda_1 = 2r_2^2(m_1/r_1^2 - m_2/r_2^2)$ și $\lambda_2 = 2r_1^2(m_2/r_2^2 - m_1/r_1^2)$.

Conform Teoremei 3.1.6, razele r_1 și r_2 trebuie să satisfacă următoarele constrângeri

$$\frac{m_1}{2m} < r_1^2 < \frac{2m_1 + m_2}{2m} \quad \text{și} \quad \frac{m_2}{2m} < r_2^2 < \frac{m_1 + 2m_2}{2m}.$$

Mai mult, dacă M_1 și M_2 sunt PMC, conform Teoremei 3.1.9, obținem intervale mai restrictive pentru razele r_1 și r_2 , adică

$$\begin{cases} \frac{m_1 + 2\sqrt{m_1 - 1}}{2m} \leq r_1^2 \leq \frac{2m_1 + m_2 - 2\sqrt{m_2 - 1}}{2m} \\ \frac{m_2 + 2\sqrt{m_2 - 1}}{2m} \leq r_2^2 \leq \frac{m_1 + 2m_2 - 2\sqrt{m_1 - 1}}{2m} \end{cases}. \quad (3.2.1)$$

Propoziția 3.2.1. Fie $\varphi_1 : M_1^{m_1} \rightarrow \mathbb{S}^{n_1}(r_1)$ și $\varphi_2 : M_2^{m_2} \rightarrow \mathbb{S}^{n_2}(r_2)$ două imersii ne-minimale astfel încât produsul extrinsec $M^m = M_1^{m_1} \times M_2^{m_2}$ este propriu biarmonic în $\mathbb{S}^n$, unde $n_1 + n_2 = n - 1$. Atunci,

$$|H^{\varphi_1}|^2 = \frac{1}{r_1^2} - \frac{\lambda_1}{m_1} \quad \text{dacă și numai dacă} \quad |H^{\varphi_2}|^2 = \frac{1}{r_2^2} - \frac{\lambda_2}{m_2}.$$

În acest caz, $|H^{\iota \circ \varphi}|^2 = 1$.

Din Propoziția 3.2.1, putem deduce următorul rezultat.



Teorema 3.2.2. *Fie $\varphi_1 : M_1^{m_1} \rightarrow \mathbb{S}^{n_1}(r_1)$ și $\varphi_2 : M_2^{m_2} \rightarrow \mathbb{S}^{n_2}(r_2)$ două imersii ne-minimale astfel încât produsul extrinsec $M^m = M_1^{m_1} \times M_2^{m_2}$ este propriu biarmonic în $\mathbb{S}^n$, $r_1^2 + r_2^2 = 1$ și $n_1 + n_2 = n - 1$. Atunci, $|H^{\iota \circ \varphi}| = 1$ dacă și numai dacă φ_1 și φ_2 sunt PMC și pseudo-umbilicale. Mai mult, în acest caz, avem un rezultat de reducere a codimensiunii, adică M este minimal în $\mathbb{S}^{n-2}(1/\sqrt{2}) \subset \mathbb{S}^{n-1}$.*

Următorul rezultat arată că există un gap pentru imaginea curburii medii a subvarietăților PMC propriu biarmonice M în $\mathbb{S}^n$, când $M = M_1 \times M_2$, și M_i este PMC și ne-minimală în $\mathbb{S}^{n_i}(r_i)$, $i \in \{1, 2\}$.

Teorema 3.2.3. *Fie $\varphi_1 : M_1^{m_1} \rightarrow \mathbb{S}^{n_1}(r_1)$ și $\varphi_2 : M_2^{m_2} \rightarrow \mathbb{S}^{n_2}(r_2)$ două imersii PMC și ne-pseudo-umbilicale, $m_1 > 2$, $m_2 > 2$, astfel încât produsul extrinsec $M^m = M_1^{m_1} \times M_2^{m_2}$ este propriu biarmonic în $\mathbb{S}^n$, $r_1^2 + r_2^2 = 1$ și $n_1 + n_2 = n - 1$. Atunci, $|H^{\iota \circ \varphi}| \in (0, (m-4)/m]$ și $|H^{\iota \circ \varphi}| = (m-4)/m$ dacă și numai dacă $r_1^2 = (3m_1 + m_2 - 4)/(4(m-2))$ și local, până la izometrii ale lui $\mathbb{S}^n$, $\varphi(M)$ este un deschis al produsului extrinsec*

$$\tilde{M}_1 \times \mathbb{S}^1 \left(\frac{1}{2} \right) \times \mathbb{S}^1 \left(\frac{1}{2} \right) \subset \mathbb{S}^{n-4} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \times \mathbb{S}^3 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right),$$

unde $\tilde{M}_1$ este minimal în $\mathbb{S}^{n-4}(1/\sqrt{2})$ și splitarea lui $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^{n-3} \times \mathbb{R}^4$ nu depinde de punctul lui M . Mai mult, dacă M este complet, atunci descompunerea anterioară a lui $\varphi(M)$ este globală, unde $\tilde{M}_1$ este o subvarietate completă și minimală a lui $\mathbb{S}^{n-4}(1/\sqrt{2})$.

Continuăm acum studiul nostru cu cazul suprafețelor. Mai întâi reamintim că suprafețele ne-minimale și PMC din $\mathbb{S}^n(r)$ au fost deja clasificate și sunt: suprafețe minimale într-o hipersferă mică a lui $\mathbb{S}^n(r)$ sau suprafețe CMC în $\mathbb{S}^3(r') \subset \mathbb{S}^n(r)$, $0 < r' \leq r$.

Obținem următorul rezultat de rigiditate.

Teorema 3.2.4. *Fie $\varphi_1 : M_1^2 \rightarrow \mathbb{S}^{n_1}(r_1)$ și $\varphi_2 : M_2^2 \rightarrow \mathbb{S}^{n_2}(r_2)$ două suprafețe ne-minimale și PMC astfel încât produsul extrinsec $M^4 = M_1^2 \times M_2^2$ este propriu biarmonic în $\mathbb{S}^n$, $r_1^2 + r_2^2 = 1$ și $n_1 + n_2 = n - 1$. Atunci, M_1 și M_2 sunt pseudo-umbilicale în $\mathbb{S}^{n_1}(r_1)$ și $\mathbb{S}^{n_2}(r_2)$, respectiv și $|H^{\iota \circ \varphi}| = 1$.*

Rezumând Teoremele 3.2.2, 3.2.3 și 3.2.4 putem enunța.

Teorema 3.2.5. *Fie $\varphi_1 : M_1^{m_1} \rightarrow \mathbb{S}^{n_1}(r_1)$, $m_1 \geq 2$, și $\varphi_2 : M_2^{m_2} \rightarrow \mathbb{S}^{n_2}(r_2)$, $m_2 \geq 2$, două subvarietăți ne-minimale și PMC astfel încât produsul extrinsec $M^m = M_1^{m_1} \times M_2^{m_2}$ este propriu biarmonic în $\mathbb{S}^n$, $r_1^2 + r_2^2 = 1$ și $n_1 + n_2 = n - 1$.*

a) Dacă $m_1 > 2$ or $m_2 > 2$, atunci

$$|H^{\iota \circ \varphi}| \in \left(0, \frac{m-4}{m} \right] \cup \{1\}.$$



b) Dacă $m_1 = m_2 = 2$, atunci φ_1 și φ_2 sunt pseudo-umbilicale, adică

$$|H^{\iota\varphi}| = 1.$$

Încheiem capitolul propunând o problemă deschisă care a apărut din următoarele considerații. Știm că pentru orice $a \geq 1/\sqrt{2}$ există o subvarietate M^m a lui $\mathbb{S}^{n-1}(a)$ astfel încât M este propriu biarmonică în $\mathbb{S}^n$. Atunci când M este o varietate produs, din Teorema 3.2.2 observăm că pentru orice r_1 ca în (3.2.1) există $M = M_1 \times M_2$ propriu biarmonică în $\mathbb{S}^n$, cu $|H^{\iota\varphi}| = 1$ și atât M_1 , cât și M_2 sunt pseudo-umbilicale. Atunci când M_1 și M_2 nu sunt pseudo-umbilicale, situația devine mai rigidă. Am văzut că, dacă $\varphi(M) = L_1^{m_1-1} \times \mathbb{S}^1(b_1) \times L_2^{m_2-1} \times \mathbb{S}^1(b_2)$, există doar două valori posibile pentru r_1 . Nu este dificil de observat că putem găsi și alte valori pentru r_1 astfel încât $M = M_1 \times M_2$ să satisfacă ipotezele Teoremei 3.2.3, considerând $\varphi(M) = L_1^{m_1-k_1} \times \mathbb{S}^{k_1}(b_1) \times L_2^{m_2-k_2} \times \mathbb{S}^{k_2}(b_2)$. Totuși, nu este clar dacă pentru orice r_1 putem găsi o astfel de varietate M care să satisfacă ipotezele Teoremei 3.2.3. Astfel, putem formula următoarea problemă deschisă.

Problema Deschisă 1. *Demonstrați că pentru orice r_1 astfel încât*

$$r_1^2 \in \left[\frac{m_1 + 2\sqrt{m_1 - 1}}{2m}, \frac{2m_1 + m_2 - 2\sqrt{m_2 - 1}}{2m} \right]$$

există un produs extrinsec $M = M_1 \times M_2$ propriu biarmonic în $\mathbb{S}^n$ astfel încât M_i este PMC și ne-pseudo-umbilicală în $\mathbb{S}^{n_i}(r_i)$, $i \in \{1, 2\}$, $r_1^2 + r_2^2 = 1$, $m_1 > 2$, $m_2 > 2$.

REZULTATE DE RIGIDITATE PENTRU HIPERSUPRAFETE COMPACTE BICONSERVATIVE

În acest capitol prezentăm demonstrații alternative pentru rezultatele de rigiditate prezentate în Teoremele 1.3.5 și 1.3.6, referitoare la hipersuprafețele compacte biconservative de curbura pozitivă din forme spațiale. În plus, demonstrăm câteva rezultate noi de rigiditate prin înlocuirea ipotezei de curbura secțională pozitivă cu anumite estimări ale pătratului normei operatorului formă.

Rezultatele prezentate în acest capitol au fost publicate în [3].

4.1. CÂTEVA PROPRIETĂȚI NOI ALE HIPERSUPRAFETELOR BICONSERVATIVE

În această secțiune demonstrăm câteva rezultate noi care vor juca un rol esențial în analiza ulterioară.

Mai întâi, fie $\varphi : M^m \rightarrow N^{m+1}(\epsilon)$ o hipersuprafață într-o formă spațială. Reamintim că am notat prin $\bar{k}_i i \in \overline{1, m}$ curburile principale ale lui M . Considerăm acum submulțimea M_A a tuturor punctelor din M în care numărul de curburile principale distincte este local constant. Pe orice componentă conexă a lui M_A , care este o submulțime deschisă a lui M , curburile principale sunt funcții netede și există un câmp local de baze ortonormate $E_i i \in \overline{1, m}$ astfel încât $A(E_i) = \bar{k}_i E_i$, pentru orice $i \in \overline{1, m}$. Atunci când considerăm curburile principale distincte ale lui A , notăm multiplicitățile acestora cu $m_1, \dots, m_\ell$, unde ℓ este numărul de curburile principale distincte.

Pentru a simplifica calculele, notăm $\bar{R} = R - \epsilon$. Astfel, avem

$$m(m-1)\bar{R} = m^2 f^2 - |A|^2. \quad (4.1.1)$$

Următoarea leamnă ne oferă o altă caracterizare a hipersuprafețelor biconservative.

Lema 4.1.1. *Fie M^m o hipersuprafață într-o formă spațială $N^{m+1}(\epsilon)$. Atunci, $\operatorname{div} S_2 = 0$ dacă și numai dacă $\operatorname{div}(f^2 A) = 0$.*

Din lema anterioară deducem că, pentru hipersuprafețele biconservative, operatorul $T = f^2 A$ are divergență zero, iar acest fapt conduce la o formulă importantă enunțată în lema următoare. După cum vom vedea, această formulă va fi utilă în studiul hipersuprafețelor biconservative de curbura scalară normalizată constantă.

Lema 4.1.2. *Fie $\varphi : M^m \rightarrow N^{m+1}(\epsilon)$ o hipersuprafață compactă biconservativă. Considerăm câmpul tensorial de tip $(1, 1)$ definit prin $T = f^2 A$ și operatorul Cheng-Yau asociat lui, adică $\square(\cdot) = \langle T, \operatorname{Hess}(\cdot) \rangle$. Atunci,*

$$0 = \int_M f^2 \left(\frac{1}{2} \Delta |A|^2 + |\nabla A|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m (\bar{k}_i - \bar{k}_j)^2 R_{ijij} \right) v_g. \quad (4.1.2)$$



Din formula (1.3.1) deducem rapid un rezultat de rigiditate pentru hipersuprafețele biconservative cu $\text{Riem}^M \geq 0$ în forme spațiale de curbura negativă. Acest rezultat nu se bazează pe compactitatea lui M , nici pe condiția $m \leq 10$ și nici pe faptul că curbura scalară normalizată este constantă.

Propoziția 4.1.3. *Fie $\varphi : M^m \rightarrow N^{m+1}(\epsilon)$ o hipersuprafață biconservativă într-o formă spațială cu $\epsilon \leq 0$. Dacă $\text{Riem}^M \geq 0$, atunci M este CMC.*

Avem următoarea inegalitate importantă.

Lema 4.1.4. *Fie $\varphi : M^m \rightarrow N^{m+1}(\epsilon)$ o hipersuprafață biconservativă într-o formă spațială. Atunci,*

$$\frac{1}{2}\Delta \left(|A|^2 + \frac{m^2}{2}f^2 \right) \leq \frac{3(m-10)}{m+26}|\nabla A|^2 - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m (\bar{k}_i - \bar{k}_j)^2 R_{ijij}. \quad (4.1.3)$$

4.2. HIPERSUPRAFETE BICONSERVATIVE CU DIMENSIUNEA CEL MULT 10

În această secțiune prezentăm două demonstrații alternative ale Teoremei 1.3.5, un rezultat de rigiditate pentru hipersuprafețe compacte biconservative, ne-minimale, de dimensiune cel mult 10 și de curbura secțională pozitivă.

Demonstrația Teoremei 1.3.5 nu a fost oferită explicit în [54], însă, așa cum indică autorii, aceasta poate fi obținută urmând aceiași pași utilizați în demonstrația unei teoreme din [52], care este destul de lungă și laborioasă. Aceasta se bazează pe utilizarea condiției de egalitate în inegalitatea lui J. H. Chen și pe faptul că

$$0 = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m (\bar{k}_i - \bar{k}_j)^2 R_{ijij} = \langle -\text{trace}(RA)(\cdot, \cdot, \cdot), A \rangle. \quad (4.2.1)$$

Din condiția de egalitate din inegalitatea lui J. H. Chen se obțin expresiile lui $(\nabla A)(E_i, E_j)$, unde $E_{i \in \overline{1, m}}$ este un câmp local de baze ortonormate care diagonalizează operatorul formă. În final, înlocuind acestea în

$$\sum_{i,j=1}^m \left\langle (\nabla^2 A)(E_j, E_i, E_i) - (\nabla^2 A)(E_i, E_j, E_i), A(E_j) \right\rangle = 0,$$

care rezultă din (4.2.1), se obține că f este constantă și concluzionăm.

În continuare prezentăm două demonstrații alternative ale Teoremei 1.3.5 și două generalizări ale acesteia.

4.2.1. PRIMA DEMONSTRAȚIE ALTERNATIVĂ A TEOREMEI 1.3.5

Deoarece $m \leq 10$ și $\text{Riem}^M \geq 0$, membrul drept al (4.1.3) este negativ, adică

$$\frac{1}{2}\Delta \left(|A|^2 + \frac{m^2}{2}f^2 \right) \leq 0.$$



Deoarece M este compactă, ultima relație implică faptul că $|A|^2 + m^2 f^2/2$ este constantă pe M , adică partea stângă a lui (4.1.3) se anulează pe M (a se vedea, de exemplu, [45]). Prin urmare, din faptul că $m \leq 10$ și din (4.1.3), obținem că pe M avem

$$\sum_{i,j=1}^m (\bar{k}_i - \bar{k}_j)^2 R_{ijij} = 0.$$

Folosind din nou faptul că $\text{Riem}^M \geq 0$, obținem

$$(\bar{k}_i - \bar{k}_j)(\epsilon + \bar{k}_i \bar{k}_j) = 0, \quad \text{pentru orice } i, j \in \overline{1, m}. \quad (4.2.2)$$

Ultima relație implică faptul că M are cel mult două curburi principale distincte în orice punct.

Considerăm acum submulțimea M_A a tuturor punctelor din M în care numărul de curburi principale distincte este local constant. Această mulțime este deschisă și densă în M . În cele ce urmează vom arăta că $\text{grad } f = 0$ pe fiecare componentă conexă a lui M_A și astfel, din densitate, vom concluziona că $\text{grad } f = 0$ pe M , adică f este constantă. Atunci rezultă că $\nabla A = 0$.

Considerăm o componentă conexă arbitrară a lui M_A . Deoarece M are cel mult două curburi principale distincte, pe această componentă avem: fie fiecare punct este umbilical, fie fiecare punct are exact două curburi principale distincte. Pentru simplitate, notăm prin M componenta conexă aleasă.

Dacă M este umbilicală, atunci este CMC.

Presupunem acum că M are exact două curburi principale distincte în orice punct. În acest caz, A este local diagonalizabil în raport cu un câmp neted de repere ortonormate $E_{i \in \overline{1, m}}$. Notăm

$$\bar{k}_1 = \dots = \bar{k}_{m_1} \quad \text{și} \quad \bar{k}_{m_1+1} = \dots = \bar{k}_m.$$

Presupunem că $\text{grad } f \neq 0$ și vom obține o contradicție. Dacă este necesar, ne putem restrânge la o submulțime deschisă a lui M , notată din nou prin M , astfel încât $\text{grad } f \neq 0$ în orice punct al lui M .

Acum, deoarece M este biconservativă, putem considera că

$$\bar{k}_1 = -\frac{m}{2}f, \quad m_1 = 1 \quad \text{și} \quad E_1 = \frac{\text{grad } f}{|\text{grad } f|}$$

pe M . Deoarece $\text{trace } A = mf$, avem

$$\bar{k}_2 = \frac{3m}{2(m-1)}f.$$

Folosind (4.2.2), obținem

$$0 = \epsilon + \bar{k}_1 \bar{k}_2 = \epsilon - \frac{3m^2}{4(m-1)}f^2.$$

Observăm că această relație este falsă dacă $\epsilon \leq 0$. Dacă $\epsilon > 0$, deoarece f este netedă, obținem că f este constantă pe M , ceea ce contrazice faptul că $\text{grad } f \neq 0$ în orice punct al lui M . $\square$



4.2.2. A DOUA DEMONSTRAȚIE ALTERNATIVĂ A TEOREMEI 1.3.5

Ca în prima demonstrație, folosind (4.1.3), obținem că $|A|^2 + m^2 f^2 / 2$ este constantă pe M și că $(\bar{k}_i - \bar{k}_j)^2 R_{ijij} = 0$ pe M .

Vom demonstra că $\text{grad } f = 0$ pe fiecare componentă conexă a lui M_A și astfel, din densitate, vom obține că $\text{grad } f = 0$ pe M . Alegem o componentă arbitrară a lui M_A , pe care o notăm de asemenea prin M . Presupunem că $\text{grad } f \neq 0$ în orice punct al lui M și vom obține o contradicție. Astfel, pe M , curburile principale $\bar{k}_i$ sunt funcții netede, $i \in \overline{1, m}$, iar operatorul A este local diagonalizabil în mod neted în raport cu un câmp local de baze ortonormate $E_{i \in \overline{1, m}}$.

Folosind faptul că M este biconservativă, putem considera că

$$\bar{k}_1 = -\frac{m}{2}f, \quad m_1 = 1 \quad \text{și} \quad E_1 = \frac{\text{grad } f}{|\text{grad } f|}$$

pe M .

Deoarece $m_1 = 1$ și $(\bar{k}_i - \bar{k}_j)^2 R_{ijij} = 0$, avem $R_{1a1a} = 0$, pentru orice $a \in \overline{2, m}$. Folosind asta, obținem

$$(\bar{k}_1 - \bar{k}_a)E_1(E_1(\bar{k}_a)) = E_1(\bar{k}_1)E_1(\bar{k}_a) - 2(E_1(\bar{k}_a))^2. \quad (4.2.3)$$

Asta implică

$$\sum_{a=2}^m (\bar{k}_1 - \bar{k}_a)E_1(\bar{k}_a) = 0.$$

Derivând relația anterioară în raport cu E_1 și folosind (4.2.3), obținem

$$0 = -\frac{3m^2}{2}(E_1(f))^2 - 3 \sum_{a=2}^m (E_1(\bar{k}_a))^2,$$

care este echivalentă

$$\frac{m^2}{2}|\text{grad } f|^2 + \sum_{a=2}^m (E_1(\bar{k}_a))^2 = 0.$$

Prin urmare, $|\text{grad } f| = 0$, care contrazice presupunerea că $\text{grad } f \neq 0$. □

4.2.3. GENERALIZĂRI ALE TEOREMEI 1.3.5

Mai întâi prezentăm o generalizare a Teoremei 1.3.5, în care înlocuim ipoteza $\text{Riem}^M \geq 0$ cu anumite estimări ale lui $|A|^2$ în funcție de curbura medie f .

Teorema 4.2.1. *Fie $\varphi : M^m \rightarrow N^{m+1}(\epsilon)$ o hipersuprafață compactă ne-minimală biconservativă. Dacă $m \leq 10$, $\epsilon + f^2 \geq 0$ când $\epsilon < 0$ și*

$$mf^2 \leq |A|^2 \leq m\epsilon + \frac{m^3}{2(m-1)}f^2 - \frac{m(m-2)}{2(m-1)}\sqrt{m^2f^4 + 4(m-1)\epsilon f^2}, \quad (4.2.4)$$

atunci $\nabla A = 0$. Mai mult, fie $|A|^2 = mf^2$ pe M , adică M este umbilicală, fie avem egalitate în a doua inegalitate a lui (4.2.4). Mai exact, avem



- a) dacă $\epsilon = -1$, atunci $\varphi(M)$ este o hipersferă a lui $\mathbb{S}^m(r)$ de rază $r > 0$,
- b) dacă $\epsilon = 0$, atunci $\varphi(M)$ este o hipersferă $\mathbb{S}^m(r)$,
- c) dacă $\epsilon = 1$, atunci $\varphi(M)$ este fie o hipersferă mică $\mathbb{S}^m(r)$ a lui $\mathbb{S}^{m+1}$, fie un produs extrinsec $\mathbb{S}^1(r_1) \times \mathbb{S}^{m-1}(r_2)$, unde $r_1^2 + r_2^2 = 1$ și $r_1 > 1/\sqrt{m}$.

Rezultatul următor este similar Teoremei 4.2.1, însă estimările lui $|A|^2$ sunt în funcție de curbura scalară normalizată.

Teorema 4.2.2. *Fie $\varphi : M^m \rightarrow N^{m+1}(\epsilon)$ o hipersuprafață compactă ne-minimală biconservativă. Dacă $3 \leq m \leq 10$, $m\bar{R} + 2\epsilon > 0$,*

$$\bar{R} \geq \frac{m-2}{2m(m-1)}|A|^2 - \frac{m}{2(m-1)}\epsilon$$

și

$$m\bar{R} \leq |A|^2 \leq \frac{m}{(m-2)(m\bar{R} + 2\epsilon)} \left(m\epsilon^2 + 4(m-1)\epsilon\bar{R} + m(m-1)\bar{R}^2 \right), \quad (4.2.5)$$

atunci $\nabla A = 0$. Mai mult, fie $|A|^2 = m\bar{R}$ pe M , adică M este umbilicală, fie avem egalitate în a doua inegalitate a lui (4.2.5). Mai exact, avem

- a) dacă $\epsilon = -1$, atunci $\varphi(M)$ este o hipersferă $\mathbb{S}^m(r)$ de rază $r > 0$,
- b) dacă $\epsilon = 0$, atunci $\varphi(M)$ este o hipersferă $\mathbb{S}^m(r)$,
- c) dacă $\epsilon = 1$, atunci $\varphi(M)$ este fie o hipersferă mică $\mathbb{S}^m(r)$ a lui $\mathbb{S}^{m+1}$, fie un produs extrinsec $\mathbb{S}^1(r_1) \times \mathbb{S}^{m-1}(r_2)$, unde $r_1^2 + r_2^2 = 1$ și $r_1 > 1/\sqrt{m}$.

4.3. HIPERSUPRAFETE BICONSERVATIVE DE CURBURĂ SCALARĂ NORMALIZATĂ CONSTANTĂ

În această secțiune oferim o demonstrație alternativă a Teoremei 1.3.6, un rezultat de rigiditate pentru hipersuprafețe compacte ne-minimale biconservative de curbura scalară normalizată constantă și curbura secțională pozitivă.

Demonstrația originală a Teoremei 1.3.6 se bazează pe o formulă de tip Simons, obținută prin calculul lui $(1/2)\Delta|S_2|^2$. Aici prezentăm o demonstrație mai scurtă, care implică operatorul Cheng–Yau.

4.3.1. DEMONSTRAȚIE ALTERNATIVĂ A TEOREMEI 1.3.6

Deoarece M are curbura scalară normalizată constantă, obținem $\Delta|A|^2 = m^2\Delta f^2$. Mai departe, prin calcule directe, deducem că $f^2\Delta f^2 = (1/2)\Delta f^4 + 4f^2|\text{grad } f|^2$, ceea ce implică faptul că

$$\frac{1}{2}f^2\Delta|A|^2 = \frac{m^2}{2} \left(\frac{1}{2}\Delta f^4 + 4f^2|\text{grad } f|^2 \right).$$



Deoarece M este o hipersuprafață compactă biconservativă, combinând formula de mai sus cu formula integrală (4.1.2), demonstrată folosind operatorul Cheng–Yau asociat tensorului cu divergență zero $T = f^2 A$, obținem

$$0 = \int_M f^2 \left(2m^2 |\text{grad } f|^2 + |\nabla A|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m (\bar{k}_i - \bar{k}_j)^2 R_{ijij} \right) v_g.$$

Deoarece $\text{Riem}^M \geq 0$, obținem că, pe M ,

$$f^2 |\text{grad } f|^2 = 0 \quad \text{și} \quad f^2 |\nabla A|^2 = 0.$$

Dacă $\text{grad } f = 0$ pe M , atunci f este constantă și nenulă, deci $\nabla A = 0$ pe M .

Presupunem prin reducere la absurd că $\text{grad } f \neq 0$ într-un punct $p \in M$, deci pe o vecinătate deschisă U a lui p . Atunci $f = 0$ pe U , ceea ce implică $\text{grad } f = 0$ pe U , contradicție.

În concluzie, $\text{grad } f = 0$ pe M , adică M este CMC, iar astfel $\nabla A = 0$. $\square$

4.3.2. O GENERALIZARE A TEOREMEI 1.3.6

La fel ca în secțiunea precedentă, înlocuim ipoteza $\text{Riem}^M \geq 0$ cu anumite estimări ale lui $|A|^2$ și obținem

Teorema 4.3.1. *Fie M^m o hipersuprafață compactă ne-minimală biconservativă în $N^{m+1}(\epsilon)$ de curbură scalară normalizată constantă, $m \geq 3$, $m\bar{R} + 2\epsilon > 0$,*

$$\bar{R} \geq \frac{m-2}{2m(m-1)} |A|^2 - \frac{m}{2(m-1)} \epsilon$$

și

$$m\bar{R} \leq |A|^2 \leq \frac{m}{(m-2)(m\bar{R} + 2\epsilon)} \left(m\epsilon^2 + 4(m-1)\epsilon\bar{R} + m(m-1)\bar{R}^2 \right). \quad (4.3.1)$$

Atunci, $\nabla A = 0$. Mai mult, fie $|A|^2 = m\bar{R}$ pe M , adică M este umbilical, fie avem egalitate în a doua inegalitate a lui (4.3.1). Mai exact, avem

- a) dacă $\epsilon = -1$, atunci $\varphi(M)$ este o hipersferă a lui $\mathbb{S}^m(r)$ de rază $r > 0$,
- b) dacă $\epsilon = 0$, atunci $\varphi(M)$ este o hipersferă $\mathbb{S}^m(r)$,
- c) dacă $\epsilon = 1$, atunci $\varphi(M)$ este fie o hipersferă mică $\mathbb{S}^m(r)$ a lui $\mathbb{S}^{m+1}$, fie un produs extrinsec $\mathbb{S}^1(r_1) \times \mathbb{S}^{m-1}(r_2)$, unde $r_1^2 + r_2^2 = 1$ și $r_1 > 1/\sqrt{m}$.

SUPRAFEȚE WEINGARTEN BICONSERVATIVE CU FIBRAT NORMAL PLAT ÎN FORME SPAȚIALE 4-DIMENSIONALE

În acest capitol continuăm studiul suprafețelor biconservative ne-minimale CMC în forme spațiale 4-dimensionale, considerând acele suprafețe care sunt Weingarten (W-suprafețe) și au fibrat normal plat, dar nu sunt PNMC. Obținem condițiile de compatibilitate pentru W-suprafețele ne-CMC (ne-PNMC) biconservative cu fibrat normal plat în $N^4(\epsilon)$. Aceste condiții formează un sistem de ecuații diferențiale ordinare de ordinul I. Studiind acest sistem, oferim câteva familii de exemple de astfel de suprafețe. După aceea, studiem biarmonicitatea W-suprafețelor ne-CMC (ne-PNMC) cu fibrat normal plat și arătăm că familiile de suprafețe biconservative găsite anterior nu sunt biarmonice. Încheiem capitolul cu opinia noastră privind (non-)existența acestei clase de suprafețe biarmonice.

Rezultatele prezentate în acest capitol sunt incluse în preprintul [4], încărcat pe arXiv și trimis spre publicare.

5.1. SUPRAFEȚE BICONSERVATIVE

Fie $\varphi : M^2 \rightarrow N^4(\epsilon)$ o suprafață și presupunem că $H \neq 0$ în orice punct al lui M . Atunci funcția curbura medie $f = |H|$ este netedă și definim

$$E_3 = \frac{1}{f}H \in C(NM). \quad (5.1.1)$$

Fie $\{E_1, E_2\}$ un câmp de baze ortonormate tangent la M , definit pe o submulțime deschisă $U \subset M$, și fie $E_4 \in C(NM)$ o secțiune normală unitară ortogonală pe E_3 . Deoarece rezultatele noastre sunt de natură locală, presupunem că $U = M$.

Putem presupune că $\{E_a\}_{a \in \overline{1,4}}$ este restricția la M a unui câmp local de baze ortonormate pe N^4 , notat de asemenea $\{E_a\}_{a \in \overline{1,4}}$. Fie $\omega_a^b \in \Lambda^1(N^4)$, $1 \leq a, b \leq 4$, formele de conexiune pe N^4 în raport cu E_a , date de

$$\nabla_V^N E_a = \omega_a^b(V)E_b, \quad \text{pentru orice } V \in C(TN^4).$$

Folosim aceeași notație ω_a^b pentru pull-back-ul $\varphi^*\omega_a^b$ și va fi clar din context la care dintre acestea ne referim. Se poate arăta că 1-forma $\omega_1^2 \in \Lambda^1(M)$ este forma de conexiune a lui M , adică

$$\nabla_X E_1 = \omega_1^2(X)E_2, \quad \text{for any } X \in C(TM^2).$$

Notăm prin A_3 și A_4 operatorii formă asociați lui E_3 , respectiv E_4 .

În cele ce urmează presupunem că $\text{grad } f \neq 0$ în orice punct al lui M . Această ipoteză este naturală, deoarece suprafețele biconservative CMC în forme spațiale



4-dimensionale, $N^4(\epsilon)$, au fost clasificate în [80]. Se știe că suprafețele pseudo-umbilicale, adică cele pentru care $A_3 = f \text{Id}$, biconservative în $N^4(\epsilon)$ sunt CMC (a se vedea [19] și [44]). Prin urmare, presupunem în continuare că $A_3 \neq f \text{Id}$ în orice punct al lui M . Aceasta înseamnă că valorile proprii ale lui A_3 au multiplicități constante egale cu 1 în orice punct. Rezultă că funcțiile valori proprii k_1 și k_2 sunt netede pe M și local putem alege un câmp de baze ortonormate $\{E_1, E_2\}$ tangent la M astfel încât

$$A_3 E_1 = k_1 E_1, \quad A_3 E_2 = k_2 E_2. \quad (5.1.2)$$

Presupunem că E_1 și E_2 sunt definite pe M și notăm cu $\omega^1, \omega^2 \in \Lambda^1(M)$ câmpul dual de baze al lui $\{E_1, E_2\}$ pe M . În acest câmp de baze duale avem

$$\omega_2^1 = -\omega_1^2 = a_1 \omega^1 + a_2 \omega^2, \quad (5.1.3)$$

și

$$\omega_3^4 = -\omega_4^3 = b_1 \omega^1 + b_2 \omega^2, \quad (5.1.4)$$

unde $a_1, a_2, b_1, b_2 \in C^\infty(M)$.

Atunci când suprafața este Weingarten și are fibrat normal plat, aceasta se bucură de mai multe proprietăți pe care le descriem în rezultatele următoare. Subliniem că Propozițiile 5.1.1, 5.1.2, 5.1.4 și Lema 5.1.3 sunt similare celor demonstrate în [65]. Am adăugat enunțurile și demonstrațiile lor pentru completitudine și pentru coerența notațiilor.

Propoziția 5.1.1. *Fie $\varphi : M^2 \rightarrow N^4(\epsilon)$ o suprafață cu fibrat plat. Presupunem că $H \neq 0$, $\text{grad } f \neq 0$ și $A_3 \neq f \text{Id}$ în orice punct. Atunci, următoarele au loc*

a) *operatorul formă în direcția lui E_4 este dat de*

$$A_4 E_1 = \alpha E_1 \quad \text{și} \quad A_4 E_2 = -\alpha E_2, \quad (5.1.5)$$

pentru un anumit $\alpha \in C^\infty(M)$;

b) *a doua formă fundamentală este dată de*

$$B(E_1, E_1) = k_1 E_3 + \alpha E_4, \quad B(E_1, E_2) = 0, \quad B(E_2, E_2) = k_2 E_3 - \alpha E_4; \quad (5.1.6)$$

c) *conexiunea Levi-Civita a lui M este dată de*

$$\nabla_{E_1} E_1 = -a_1 E_2, \quad \nabla_{E_1} E_2 = a_1 E_1, \quad \nabla_{E_2} E_1 = -a_2 E_2, \quad \nabla_{E_2} E_2 = a_2 E_1, \quad (5.1.7)$$

conexiunea în fibratul normal are expresia

$$\nabla_{E_1}^\perp E_3 = b_1 E_4, \quad \nabla_{E_1}^\perp E_4 = -b_1 E_3, \quad \nabla_{E_2}^\perp E_3 = b_2 E_4, \quad \nabla_{E_2}^\perp E_4 = -b_2 E_3 \quad (5.1.8)$$

și

$$E_1(b_2) - E_2(b_1) = a_1 b_1 + a_2 b_2; \quad (5.1.9)$$



d) curbura gaussiană este

$$K = E_1(a_2) - E_2(a_1) - a_1^2 - a_2^2; \quad (5.1.10)$$

e) ecuațiile Gauss și Codazzi sunt echivalente cu

$$K = \epsilon + k_1 k_2 - \alpha^2 \quad (5.1.11)$$

$$E_1(k_2) = a_2(k_2 - k_1) - \alpha b_1 \quad (5.1.12)$$

$$E_2(k_1) = a_1(k_2 - k_1) + \alpha b_2 \quad (5.1.13)$$

$$E_1(\alpha) = 2\alpha a_2 + k_2 b_1 \quad (5.1.14)$$

$$E_2(\alpha) = -2\alpha a_1 - k_1 b_2; \quad (5.1.15)$$

f) mai mult, dacă M^2 este și o W -suprafață, atunci $\text{grad } f$ este paralel cu $\text{grad } K$, adică

$$\text{grad } f \parallel \text{grad } K. \quad (5.1.16)$$

Sub ipoteza adițională de biconservativitate, W -suprafețe cu fibrat normal plat au proprietăți noi.

Propoziția 5.1.2. Fie $\varphi : M^2 \rightarrow N^4(\epsilon)$ o W -suprafață biconservativă cu fibrat normal plat. Presupunem că $H \neq 0$, $\text{grad } f \neq 0$ și $A_3 \neq f \text{Id}$ în orice punct. Atunci, următoarele relații au loc

$$(k_1 + f)E_1(f) = -f\alpha b_1, \quad (5.1.17)$$

$$(k_2 + f)E_2(f) = f\alpha b_2, \quad (5.1.18)$$

$$E_1(k_1) = \frac{k_2 - k_1}{2f} (E_1(f) - 2fa_2), \quad (5.1.19)$$

$$E_2(k_2) = -\frac{k_2 - k_1}{2f} (E_2(f) + 2fa_1), \quad (5.1.20)$$

$$E_1(K) = 6fE_1(f) - 4a_2(f^2 - K + \epsilon), \quad (5.1.21)$$

$$E_2(K) = 6fE_2(f) + 4a_1(f^2 - K + \epsilon). \quad (5.1.22)$$

Pentru simplitatea expunerii, prin suprafețe biconservative ne-CMC înțelegem suprafețe biconservative astfel încât $H \neq 0$, $\text{grad } f \neq 0$ și $A_3 \neq f \text{Id}$ în orice punct.

Sub o ipoteză tehnică minoră, observăm că suprafețele pe care le studiem au o proprietate cheie.

Lema 5.1.3. Fie $\varphi : M^2 \rightarrow N^4(\epsilon)$ o W -suprafață ne-CMC biconservativă cu fibrat normal plat. Presupunem că $3f^2 + K - \epsilon \neq 0$ în orice punct. Atunci,

$$\langle \nabla_{E_1}^\perp E_3, E_4 \rangle \langle \nabla_{E_2}^\perp E_3, E_4 \rangle = 0 \quad \text{on } M.$$



Concluzia Lemei 5.1.3 poate fi reformulată ca $b_1 b_2 = 0$ pe M . Dacă $b_1 = b_2 = 0$ pe M , atunci (5.1.8) implică faptul că $\nabla^\perp E_3 = 0$, adică M este PNMC. Suprafețele biconservative PNMC în forme spațiale 4-dimensionale au fost clasificate în [91], [92] și [112]. Deoarece suntem interesați de cazul ne-PNMC, atunci, eventual restrângând M , presupunem în continuare că $b_1^2 + b_2^2 > 0$ pe M .

Propoziția 5.1.4. *Fie $\varphi : M^2 \rightarrow N^4(\epsilon)$ o W -suprafață ne-CMC biconservativă cu fibrat normal plat. Presupunem că $3f^2 + K - \epsilon \neq 0$ în orice punct. Dacă M este ne-PNMC, atunci $\langle \nabla_{E_1}^\perp E_3, E_4 \rangle \neq 0$ în fiecare punct al lui M și $\langle \nabla_{E_2}^\perp E_3, E_4 \rangle = 0$ pe M .*

Se poate arăta că

$$E_2(b_1) = E_2(k_1) = E_2(\alpha) = E_2(k_2) = E_2(K) = E_2(a_2) = 0 \quad \text{on } M. \quad (5.1.23)$$

Presupunem că ne aflăm în ipotezele Propoziției 5.1.4. Fie $p_0 \in M$ un punct fixat arbitrar. Considerăm $\{\psi_s\}_{s \in I}$ fluxul lui E_1 în jurul lui p_0 , pentru un interval deschis I , cu $0 \in I$, și $\gamma = \gamma(t)$ curba integrală a lui E_2 cu $\gamma(0) = p_0$. Definim următorul hartă locală

$$X^f(s, t) = \psi_s(\gamma(t)) = \psi_{\gamma(t)}(s).$$

Acum, determinăm expresia metricii de pe M în această hartă locală.

Propoziția 5.1.5. *Fie $\varphi : M^2 \rightarrow N^4(\epsilon)$ o W -suprafață ne-CMC biconservativă cu fibrat normal plat. Presupunem că $3f^2 + K - \epsilon \neq 0$, $\nabla^\perp E_3 \neq 0$, $A_4 \neq 0$ și $\nabla_{E_2} E_2 \neq 0$ în orice punct. Atunci, în jurul oricărui punct, există o hartă locală (s, t) astfel încât $a_2 = a_2(s)$ și $g(s, t) = ds^2 + g_{22}(s)dt^2$, unde $g_{22} = g_{22}(s)$ este o soluție strict pozitivă a următorului ODE*

$$\frac{dg_{22}}{ds} = -2a_2 g_{22}.$$

Rezumând toate informațiile pe care le avem până în acest moment, obținem că o W -suprafață ne-CMC (ne-PNMC) cu fibrat normal plat trebuie să satisfacă următorul sistem ODE de ordinul întâi.

Teorema 5.1.6. *Fie $\varphi : M^2 \rightarrow N^4(\epsilon)$ o W -suprafață ne-CMC biconservativă cu fibrat normal plat. Presupunem că $3f^2 + K - \epsilon \neq 0$, $\nabla^\perp E_3 \neq 0$, $A_4 \neq 0$ și $\nabla_{E_2} E_2 \neq 0$ în orice punct. Atunci, în jurul oricărui punct, există o hartă locală (s, t) astfel încât $f = f(s)$, $k_1 = k_1(s)$, $k_2 = k_2(s)$, $\alpha = \alpha(s)$, $a_2 = a_2(s)$, $b_1 = b_1(s)$ și $K = K(s)$. Mai mult, (a_2, f, α, k_2) este o soluție a următorului sistem ODE de ordinul întâi*

$$\begin{cases} \dot{a}_2 = \epsilon + k_2(2f - k_2) - \alpha^2 + a_2^2 \\ \dot{f} = -\frac{f\alpha b_1}{3f - k_2} \\ \dot{\alpha} = 2\alpha a_2 + k_2 b_1 \\ \dot{k}_2 = 2a_2(k_2 - f) - \alpha b_1 \end{cases}, \quad (5.1.24)$$

unde $\dot{a}_2$, $\dot{f}$, $\dot{\alpha}$ și $\dot{k}_2$ reprezintă derivatele în raport cu s a lui a_2 , f , α și k_2 , respectiv.

În ceea ce urmează dăm o reciprocă Teoremei 5.1.6. Pentru aceasta, notăm mai întâi $\mathcal{U} = a_2$, $\mathcal{V} = b_1$, $\mathcal{W} = f$, $\mathcal{X} = \alpha$ și $\mathcal{Y} = k_2$ și rescriem (5.1.24). Fie

$$\Omega = \{(\mathcal{U}, \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}) \in \mathbb{R}^* \times (0, \infty) \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \mid 3\mathcal{W} - \mathcal{Y} \neq 0 \text{ și } 3\mathcal{W}^2 + \mathcal{Y}(2\mathcal{W} - \mathcal{Y}) - \mathcal{X}^2 \neq 0\},$$

și fie I un interval deschis. Definim $F_{\mathcal{V}} : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^4$ prin

$$F_{\mathcal{V}}(s, \mathcal{U}, \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \begin{pmatrix} \epsilon + \mathcal{Y}(2\mathcal{W} - \mathcal{Y}) - \mathcal{X}^2 + \mathcal{U}^2 \\ -\frac{\mathcal{W}\mathcal{X}\mathcal{V}(s)}{3\mathcal{W} - \mathcal{Y}} \\ 2\mathcal{X}\mathcal{U} + \mathcal{Y}\mathcal{V}(s) \\ 2\mathcal{U}(\mathcal{Y} - \mathcal{W}) - \mathcal{X}\mathcal{V}(s) \end{pmatrix}$$

și este clar că (5.1.24) este echivalent cu următorul sistem ODE de ordinul întâi

$$\dot{X}(s) = F_{\mathcal{V}}(s, X(s)), \quad \text{pentru orice } s, \quad (5.1.25)$$

unde $\epsilon \in \mathbb{R}$, $X(s) = (\mathcal{U}(s), \mathcal{W}(s), \mathcal{X}(s), \mathcal{Y}(s))$ și $\mathcal{V} : I \rightarrow \mathbb{R}^*$ este o funcție netedă fixată arbitrar.

Deoarece $F_{\mathcal{V}}$ este netedă, deducem că fiind dată o condiție inițială arbitrară $(s_0, \mathcal{U}_0, \mathcal{W}_0, \mathcal{X}_0, \mathcal{Y}_0) \in I \times \Omega$, sistemul de ecuații (5.1.25) are o soluție unică în vecinătatea lui s_0 , pentru orice funcție netedă $\mathcal{V}$.

Pornind de la o soluție a sistemului (5.1.25), în rezultatul următor oferim o metodă de construire a W -suprafețelor ne-CMC biconservative cu fibrat normal plat, care satisfac condițiile suplimentare. Astfel, putem spune că (5.1.25) reprezintă (toate) condițiile de compatibilitate pentru această clasă de suprafețe biconservative.

Teorema 5.1.7. *Fie $\mathcal{V} : I \rightarrow \mathbb{R}^*$ o funcție netedă și considerăm $(\mathcal{U}, \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y})$ o soluție a (5.1.25) definită pe I . Pe $I \times \mathbb{R}$ definim metrica $g(s, t) = ds^2 + g_{22}(s)dt^2$, pentru orice $(s, t) \in I \times \mathbb{R}$, unde g_{22} este o soluție strict pozitivă a*

$$\frac{dg_{22}}{ds} = -2\mathcal{U}g_{22}.$$

Atunci, există o imersie biconservativă $\varphi : I \times \mathbb{R} \rightarrow N^4(\epsilon)$ astfel încât

- a) $3f^2 + K - \epsilon \neq 0$, $H \neq 0$, $\text{grad } f \neq 0$, $A_3 \neq f \text{Id}$, $A_4 \neq 0$ și $\nabla_{E_2} E_2 \neq 0$ în orice punct din $I \times \mathbb{R}$;
- b) φ are fibrat normal plat și $\text{grad } f$ este paralel cu $\text{grad } K$;
- c) $\nabla_{E_1}^\perp E_3 = \mathcal{V}E_4 \neq 0$ în orice punct și $\nabla_{E_2}^\perp E_3 = 0$ pe $I \times \mathbb{R}$, deci φ este ne-PNMC.



Mai mult, avem $f = f(s) = \mathcal{W}(s)$, $k_2 = k_2(s) = \mathcal{Y}(s)$, $\alpha = \alpha(s) = \mathcal{X}(s)$, $a_2 = a_2(s) = \mathcal{U}(s)$ și $b_1 = b_1(s) = \mathcal{V}(s)$.

Teorema 5.1.7 garantează că orice soluție a sistemului (5.1.25) furnizează o W -suprafață ne-CMC biconservativă cu fibrat normal plat în $N^4(\epsilon)$. Prin urmare, construirea de exemple ale unor astfel de suprafețe biconservative este echivalentă cu găsirea de soluții ale sistemului (5.1.25). În cele ce urmează, prezentăm o soluție particulară a sistemului (5.1.25) pentru care $\mathcal{Y} = 0$. Această soluție este o reminiscență a situației din cazul hipersuprafețelor biconservative, deoarece grad f este acum un vector propriu al lui A_3 corespunzător valorii proprii $2f$.

Teorema 5.1.8. *Fie $\varphi : M^2 \rightarrow N^4(\epsilon)$ o W -suprafață ne-CMC cu fibrat normal plat. Presupunem că $3f^2 + K - \epsilon \neq 0$, $\nabla^\perp E_3 \neq 0$, $A_4 \neq 0$ și $\nabla_{E_2} E_2 \neq 0$ în fiecare punct. Atunci, M satisface $A_3(\text{grad } f) = 2f \text{ grad } f$ dacă și numai dacă, local,*

$$\mathcal{V} = -\frac{3c^3 \dot{f}}{f^3} \quad \text{și} \quad \begin{cases} \mathcal{U} = \frac{3}{2} \frac{\dot{f}}{f} \\ \mathcal{W} = f \\ \mathcal{X} = c^{-3} f^3 \\ \mathcal{Y} = 0 \end{cases}, \quad (5.1.26)$$

unde c este o constantă strict pozitivă și f este o soluție strict pozitivă a

$$\ddot{f}f - \frac{5}{2}\dot{f}^2 - \frac{2}{3}\epsilon f^2 + \frac{2}{3}c^{-6}f^8 = 0 \quad (5.1.27)$$

astfel încât $\dot{f} > 0$.

Se poate arăta că am obținut o familie cu 2-parametrică de W -imersii ne-CMC și ne-PNMC biconservative cu fibrat normal plat.

Pentru a determina alte suprafețe biconservative cu proprietăți specifice, de exemplu de curbura gaussiană constantă, este util să rescriem sistemul (5.1.25) într-o formă echivalentă.

Sistemul (5.1.25) nu implică în mod explicit curbura gaussiană K , însă toată informația furnizată de K este conținută în acest sistem. După cum vom vedea, prin includerea lui K în (5.1.25), mai precis prin includerea relațiilor (5.1.21) și (5.1.11) ca restricție, obținem un nou sistem echivalent cu (5.1.25). Se dovedește că acest nou sistem este mai adecvat pentru atingerea obiectivului nostru.

Astfel, fie

$$\overline{\Omega} = \{(\mathcal{U}, \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{K}) \in \mathbb{R}^* \times (0, \infty) \times (0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \\ 3\mathcal{W} - \mathcal{Y} \neq 0 \text{ și } 3\mathcal{W}^2 + \mathcal{K} - \epsilon \neq 0\},$$



și I un interval deschis. Definim $\bar{F}_{\mathcal{V}} : I \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^5$ prin

$$\bar{F}_{\mathcal{V}}(s, \mathcal{U}, \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{K}) = \begin{pmatrix} \mathcal{K} + \mathcal{U}^2 \\ -\frac{\mathcal{W}\mathcal{X}\mathcal{V}(s)}{3\mathcal{W} - \mathcal{Y}} \\ 2\mathcal{X}\mathcal{U} + \mathcal{Y}\mathcal{V}(s) \\ 2\mathcal{U}(\mathcal{Y} - \mathcal{W}) - \mathcal{X}\mathcal{V}(s) \\ -\frac{6\mathcal{W}^2\mathcal{X}\mathcal{V}(s)}{3\mathcal{W} - \mathcal{Y}} - 4\mathcal{U}(\mathcal{W}^2 - \mathcal{K} + \epsilon) \end{pmatrix}$$

și considerăm următorul sistem ODE

$$\dot{X}(s) = \bar{F}_{\mathcal{V}}(s, X(s)), \quad \text{pentru orice } s,$$

unde $\epsilon \in \mathbb{R}$, $X(s) = (\mathcal{U}(s), \mathcal{W}(s), \mathcal{X}(s), \mathcal{Y}(s), \mathcal{K}(s))$ și $\mathcal{V} : I \rightarrow \mathbb{R}^*$ este o funcție netedă fixată arbitrar.

Acum este ușor de văzut că

Propoziția 5.1.9. *Sistemul diferențial (5.1.25) este echivalent cu următorul sistem diferențial*

$$\begin{cases} \dot{X}(s) = \bar{F}_{\mathcal{V}}(s, X(s)), \\ \mathcal{K}(s) = \epsilon + \mathcal{Y}(s)(2\mathcal{W}(s) - \mathcal{Y}(s)) - \mathcal{X}^2(s) \end{cases}, \quad \text{pentru orice } s. \quad (5.1.28)$$

După cum am menționat, prezentăm o soluție particulară a (5.1.28) și, în consecință o soluție a (5.1.25), cu o interpretare geometrică interesantă.

Teorema 5.1.10. *Fie $\varphi : M^2 \rightarrow N^4(\epsilon)$ o W -suprafață ne-CMC biconservativă cu fibrat normal plat. Presupunem că $3f^2 + K - \epsilon \neq 0$, $\nabla^\perp E_3 \neq 0$, $A_4 \neq 0$ și $\nabla_{E_2} E_2 \neq 0$ în orice punct. Atunci, M are curbura gaussiană constantă $K = \epsilon$ dacă și numai dacă, local,*

$$\mathcal{V} = -\frac{\dot{f}(3 - cf)}{\sqrt{c}f^{\frac{3}{2}}\sqrt{2 - cf}} \quad \text{și} \quad \begin{cases} \mathcal{U} = \frac{3}{2}\frac{\dot{f}}{f} \\ \mathcal{W} = f \\ \mathcal{X} = \sqrt{c}f^{\frac{3}{2}}\sqrt{2 - cf} \\ \mathcal{Y} = cf^2 \end{cases}, \quad (5.1.29)$$

unde c este o constantă reală strict pozitivă și f este o soluție strict pozitivă a

$$\ddot{f}f - \frac{5}{2}\dot{f}^2 - \frac{2}{3}\epsilon f^2 = 0 \quad (5.1.30)$$

care satisface $\dot{f} > 0$.



Se poate arăta că avem o familie cu 1-parametrică de W-imersii ne-CMC și ne-PNMC biconservative cu fibrat normal plat.

La finalul acestei secțiuni, remarcăm că în demonstrația Teoremei 5.1.7 relația $3f^2 + K - \epsilon \neq 0$ nu a fost necesară, chiar dacă aceasta a fost implicit asigurată de definiția domeniului Ω . De fapt, dacă presupunem egalitatea

$$3f^2 + K - \epsilon = 0 \quad (5.1.31)$$

și modificăm ușor Ω , Teorema 5.1.7 rămâne valabilă și obținem un rezultat de existență. Mai mult, în rezultatul următor determinăm toate W-suprafețele ne-CMC biconservative cu fibrat normal plat care satisfac (5.1.31).

Teorema 5.1.11. *Fie $\varphi : M^2 \rightarrow N^4(\epsilon)$ o W-suprafață ne-CMC biconservativă cu fibrat normal plat. Presupunem că $\langle \nabla_{E_1}^\perp E_3, E_4 \rangle \langle \nabla_{E_2}^\perp E_3, E_4 \rangle = 0$ pe M și $\nabla^\perp E_3 \neq 0$, $A_4 \neq 0$ și $\nabla_{E_2} E_2 \neq 0$ în orice punct. Atunci, M satisface $3f^2 + K - \epsilon = 0$ dacă și numai dacă, local,*

$$\mathcal{V} = \frac{cf}{f\sqrt{-4cf^{\frac{1}{2}} - c^2}} \quad \text{și} \quad \begin{cases} \mathcal{U} = \frac{3}{4} \frac{f}{f} \\ \mathcal{W} = f \\ \mathcal{X} = \sqrt{-4cf^{\frac{3}{2}} - c^2 f} \\ \mathcal{Y} = 3f + cf^{\frac{1}{2}} \\ \mathcal{K} = \epsilon - 3f^2 \end{cases},$$

unde $c < 0$ și f este o soluție strict pozitivă a

$$\ddot{f}f - \frac{7}{4}\dot{f}^2 + 4f^4 - \frac{4}{3}\epsilon f^2 = 0, \quad (5.1.32)$$

astfel încât $\dot{f} > 0$.

În acest caz, metrica indusă a lui M^2 este dată de

$$g(s, t) = ds^2 + f^{-\frac{3}{2}}(s)dt^2, \quad \text{pentru orice } (s, t). \quad (5.1.33)$$

Se poate arăta că am obținut o familie cu 2-parametrică de W-imersii ne-CMC și ne-PNMC biconservative cu fibrat normal plat.

Reamintim că în cazul suprafețelor ne-CMC biconservative $\psi : (M^2, g) \rightarrow N^3(\epsilon)$, ecuația Gauss este echivalentă cu $K = \epsilon - 3(f^\psi)^2$ (a se vedea [20]). Inspirându-ne din aceasta, obținem următorul rezultat.

Teorema 5.1.12. *Fie $(M^2 = I \times \mathbb{R}, g)$ o suprafață abstractă cu metrica dată de (5.1.33) cu f o funcție strict pozitivă care satisface $\dot{f} > 0$ și (5.1.32). Atunci,*



- a) există o familie 1-parametrică de W -suprafețe ne-CMC biconservative $\varphi : (M^2, g) \rightarrow N^4(\epsilon)$ cu fibrat normal plat care satisfac următoarele condiții $\langle \nabla_{E_1}^\perp E_3, E_4 \rangle \langle \nabla_{E_2}^\perp E_3, E_4 \rangle = 0$, $K = \epsilon - 3(f^\varphi)^2$ pe M și $\nabla^\perp E_3 \neq 0$, $A_4 \neq 0$, $\nabla_{E_2} E_2 \neq 0$ în orice punct. Toate suprafețele din această familie au aceeași curbura principală dată de

$$(f^\varphi)^2 = \frac{1}{3}(\epsilon - K);$$

- b) există o unică suprafață ne-CMC biconservativă $\psi : (M^2, g) \rightarrow N^3(\epsilon)$. Curbura ei medie este

$$(f^\psi)^2 = (f^\varphi)^2 = \frac{1}{3}(\epsilon - K).$$

5.2. SUPRAFETE BIARMONICE

În această secțiune dăm o caracterizare a W -suprafețelor biarmonice cu fibrat normal plat și arătăm că suprafețele prezentate în Teoremele 5.1.8, 5.1.10 și 5.1.11 nu pot fi biarmonice.

Teorema 5.2.1. Fie $\varphi : M^2 \rightarrow N^4(\epsilon)$ o W -suprafață ne-CMC cu fibrat normal plat. Presupunem că $3f^2 + K - \epsilon \neq 0$, $\nabla^\perp E_3 \neq 0$, $A_4 \neq 0$ și $\nabla_{E_2} E_2 \neq 0$ în orice punct. Atunci, M este biarmonică dacă și numai dacă, în jurul fiecărui punct, există o hartă locală (s, t) astfel încât $f = f(s)$, $k_1 = k_1(s)$, $k_2 = k_2(s)$, $\alpha = \alpha(s)$, $a_2 = a_2(s)$, $b_1 = b_1(s)$, $K = K(s)$ și următorul sistem ODE este satisfăcut

$$\begin{cases} \dot{a}_2 = \epsilon + k_2(2f - k_2) - \alpha^2 + a_2^2 \\ (3f - k_2)\dot{f} = -f\alpha b_1 \\ \dot{\alpha} = 2\alpha a_2 + k_2 b_1 \\ \dot{k}_2 = 2a_2(k_2 - f) - \alpha b_1 \\ \ddot{f} = a_2 \dot{f} + f(b_1^2 + k_1^2 + k_2^2 - 2\epsilon) \\ \dot{b}_1 = -\frac{2b_1}{f}\dot{f} + a_2 b_1 - \alpha(k_2 - k_1) \end{cases}, \quad (5.2.1)$$

unde $\dot{a}_2$, $\dot{f}$, $\dot{\alpha}$, $\dot{k}_2$, $\dot{b}_1$ reprezintă derivatele în raport cu s a a_2 , f , α , k_2 și b_1 , respectiv.

Ca în cazul biconservativ, notăm $\mathcal{U} = \mathcal{U}(s) = a_2(s)$, $\mathcal{V} = \mathcal{V}(s) = b_1(s)$, $\mathcal{W} = \mathcal{W}(s) = f(s)$, $\mathcal{X} = \mathcal{X}(s) = \alpha(s)$, $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}(s) = k_2(s)$ și $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(s) = \dot{f}(s)$ și considerăm

$$F : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \times (0, \infty) \times (0, \infty) \times \mathbb{R} \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^6$$



definită prin

$$F(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}) = \begin{pmatrix} \epsilon + \mathcal{Y}(2\mathcal{W} - \mathcal{Y}) - \mathcal{X}^2 + \mathcal{U}^2 \\ -\frac{2\mathcal{V}\mathcal{Z}}{\mathcal{W}} + \mathcal{U}\mathcal{V} + 2\mathcal{X}(\mathcal{W} - \mathcal{Y}) \\ \mathcal{Z} \\ 2\mathcal{X}\mathcal{U} + \mathcal{Y}\mathcal{V} \\ 2\mathcal{U}(\mathcal{Y} - \mathcal{W}) - \mathcal{X}\mathcal{V} \\ \mathcal{U}\mathcal{Z} + \mathcal{W}(\mathcal{V}^2 + (2\mathcal{W} - \mathcal{Y})^2 + \mathcal{Y}^2 - 2\epsilon) \end{pmatrix}.$$

Atunci, sistemul (5.2.1) este echivalent cu următorul sistem ODE de ordinul întâi cu o constrângere

$$\begin{cases} \dot{X}(s) = F(X(s)) \\ (3\mathcal{W}(s) - \mathcal{Y}(s))\mathcal{Z}(s) = -\mathcal{W}(s)\mathcal{X}(s)\mathcal{V}(s) \end{cases}, \quad \text{pentru orice } s, \quad (5.2.2)$$

unde $X(s) = (\mathcal{U}(s), \mathcal{V}(s), \mathcal{W}(s), \mathcal{X}(s), \mathcal{Y}(s), \mathcal{Z}(s))$.

Constrângerea sistemului (5.2.2) va împiedica, cel mai probabil, existența W -suprafețelor biarmonice cu fibrat normal plat.

Observația 5.2.2. Folosind sistemul (5.2.2), se poate arăta că suprafețele biconservative prezentate în Teoremele 5.1.8, 5.1.10 și 5.1.11 nu sunt biarmonice.

5.3. DIRECȚII VIITOARE DE CERCETARE

Inspirați de Observația (5.2.2), formulăm următoarea conjectură.

Conjectura 1. Fie $\varphi : M^2 \rightarrow N^4(\epsilon)$ o W -suprafață ne-CMC cu fibrat normal plat. Presupunem că $3f^2 + K - \epsilon \neq 0$ and $\nabla^\perp E_3 \neq 0$ în orice punct. Atunci, M nu poate fi biarmonică.

Dacă Conjectura 1 se dovedește a fi adevărată, atunci obținem clasificarea W -suprafețelor biarmonice cu fibrat normal plat în $N^4(\epsilon)$. Mai exact, am avea

Teorema 5.3.1 (adevărată sub validitatea Conjecturii 1). Fie $\varphi : M^2 \rightarrow N^4(\epsilon)$ o W -suprafață propriu biarmonică cu fibrat normal plat. Presupunem că $3f^2 + K - \epsilon \neq 0$ în orice punct. Atunci, $\epsilon > 0$, adică $N^4(\epsilon)$ este sfera 4-dimensională $\mathbb{S}^4(r)$ de rază $r = 1/\sqrt{\epsilon}$, și imaginea $\varphi(M)$ stă minimal într-o hipersferă mică $\mathbb{S}^3(r/\sqrt{2})$ a lui $\mathbb{S}^4(r)$.

Chiar dacă Teorema 5.3.1 va fi un rezultat important în teoria suprafețelor biarmonice în forme spațiale 4-dimensionale și, probabil, dificil de demonstrat, aceasta va reprezenta doar un pas intermediar către o problemă mai generală și mai dificilă. De fapt, cea mai importantă problemă deschisă din acest domeniu este



Conjectura 2. Fie $\varphi : M^2 \rightarrow N^4(\epsilon)$ o imersie propriu biarmonică. Atunci, $\epsilon > 0$, adică $N^4(\epsilon)$ este sfera 4-dimensională $\mathbb{S}^4(r)$ de rază $r = 1/\sqrt{\epsilon}$, și imaginea $\varphi(M)$ stă minimal într-o hipersferă mică $\mathbb{S}^3(r/\sqrt{2})$ a lui $\mathbb{S}^4(r)$.

Ținând cont de un rezultat din [97], afirmația de mai sus poate fi reformulată astfel

Conjectura 2'. Fie $\varphi : M^2 \rightarrow N^4(\epsilon)$ o imersie propriu biarmonică. Atunci, $\epsilon > 0$, adică $N^4(\epsilon)$ este sfera 4-dimensională $\mathbb{S}^4(r)$ de rază $r = 1/\sqrt{\epsilon}$, și $|H| = 1/r$.

BIBLIOGRAFIE

- [1] K. Akutagawa and S. Maeta. Biharmonic properly immersed submanifolds in Euclidean spaces. *Geom. Dedicata*, 164:351–355, 2013.
- [2] Ş. Andronic, Y. Fu, and C. Oniciuc. On the biharmonic hypersurfaces with three distinct principal curvatures in space forms. *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie (N.S.)*, 68(116)(1):35–58, 2025.
- [3] Ş. Andronic and A. Kayhan. Rigidity results for compact biconservative hypersurfaces in space forms. *J. Geom. Phys.*, 212:Paper No. 105460, 15, 2025.
- [4] Ş. Andronic, S. Montaldo, C. Oniciuc, and A. Sanna. Biconservative Weingarten surfaces with flat normal bundle in $N^4(\epsilon)$. arXiv:2507.22708, 2025.
- [5] Ş. Andronic and S. Nistor. Gap results for biharmonic submanifolds in spheres. *J. Math. Anal. Appl.*, 548(1):Paper No. 129378, 34, 2025.
- [6] J. Arroyo, O. J. Garay, and J. J. Mencía. On a family of surfaces of revolution of finite Chen-type. *Kodai Math. J.*, 21(1):73–80, 1998.
- [7] P. Baird and J. Eells. A conservation law for harmonic maps. In *Geometry Symposium, Utrecht 1980 (Utrecht, 1980)*, volume 894 of *Lecture Notes in Math.*, pages 1–25. Springer, Berlin-New York, 1981.
- [8] P. Baird and J. C. Wood. *Harmonic morphisms between Riemannian manifolds*, volume 29 of *London Mathematical Society Monographs. New Series*. The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2003.
- [9] A. Balmuş, S. Montaldo, and C. Oniciuc. Classification results for biharmonic submanifolds in spheres. *Israel J. Math.*, 168:201–220, 2008.
- [10] A. Balmuş, S. Montaldo, and C. Oniciuc. Classification results and new examples of proper biharmonic submanifolds in spheres. *Note Mat.*, 28:49–61, 2009.
- [11] A. Balmuş, S. Montaldo, and C. Oniciuc. Biharmonic hypersurfaces in 4-dimensional space forms. *Math. Nachr.*, 283(12):1696–1705, 2010.
- [12] A. Balmuş and C. Oniciuc. Biharmonic surfaces of $\mathbb{S}^4$. *Kyushu J. Math.*, 63(2):339–345, 2009.
- [13] A. Balmuş and C. Oniciuc. Biharmonic submanifolds with parallel mean curvature vector field in spheres. *J. Math. Anal. Appl.*, 386(2):619–630, 2012.



- [14] H. Bibi, E. Loubeau, and C. Oniciuc. Unique continuation property for biharmonic hypersurfaces in spheres. *Ann. Global Anal. Geom.*, 60(4):807–827, 2021.
- [15] H. Bibi, M. Soret, and M. Ville. Biharmonic hypersurfaces in Euclidean spaces. arXiv:2410.13546, 2025.
- [16] W. M. Boothby. *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*, volume No. 63 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975.
- [17] V. Branding. On interpolating sesqui-harmonic maps between Riemannian manifolds. *J. Geom. Anal.*, 30(1):248–273, 2020.
- [18] R. Caddeo, S. Montaldo, and C. Oniciuc. Biharmonic submanifolds of $\mathbb{S}^3$. *Internat. J. Math.*, 12(8):867–876, 2001.
- [19] R. Caddeo, S. Montaldo, and C. Oniciuc. Biharmonic submanifolds in spheres. *Israel J. Math.*, 130:109–123, 2002.
- [20] R. Caddeo, S. Montaldo, C. Oniciuc, and P. Piu. Surfaces in three-dimensional space forms with divergence-free stress-bienergy tensor. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 193(2):529–550, 2014.
- [21] E. Cartan. Familles de surfaces isoparamétriques dans les espaces à courbure constante. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 17(1):177–191, 1938.
- [22] E. Cartan. Sur des familles remarquables d’hypersurfaces isoparamétriques dans les espaces sphériques. *Math. Z.*, 45:335–367, 1939.
- [23] T. E. Cecil and P. J. Ryan. *Geometry of hypersurfaces*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York, 2015.
- [24] S. Chang. A closed hypersurface with constant scalar and mean curvatures in $\mathbb{S}^4$ is isoparametric. *Comm. Anal. Geom.*, 1(1):71–100, 1993.
- [25] S. Chang. On closed hypersurfaces of constant scalar curvatures and mean curvatures in $\mathbb{S}^{n+1}$. *Pacific J. Math.*, 165(1):67–76, 1994.
- [26] B.-Y. Chen. On the surface with parallel mean curvature vector. *Indiana Univ. Math. J.*, 22:655–666, 1972/73.
- [27] B.-Y. Chen. *Geometry of submanifolds*, volume No. 22 of *Pure and Applied Mathematics*. Marcel Dekker, Inc., New York, 1973.
- [28] B.-Y. Chen. *Total mean curvature and submanifolds of finite type*, volume 1 of *Series in Pure Mathematics*. World Scientific Publishing Co., Singapore, 1984.



- [29] B.-Y. Chen. Some open problems and conjectures on submanifolds of finite type. *Soochow J. Math.*, 17(2):169–188, 1991.
- [30] B.-Y. Chen. *Total mean curvature and submanifolds of finite type*, volume 27 of *Series in Pure Mathematics*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, second edition, 2015.
- [31] B.-Y. Chen. Chen’s biharmonic conjecture and submanifolds with parallel normalized mean curvature vector. *Mathematics*, 7(8):710, 2019.
- [32] B.-Y. Chen and S. Ishikawa. Biharmonic surfaces in pseudo-Euclidean spaces. *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A*, 45(2):323–347, 1991.
- [33] B.-Y. Chen and K. Yano. Pseudo-umbilical submanifolds in a Riemannian manifold of constant curvature. In *Differential geometry (in honor of Kentaro Yano)*, pages 61–71. Kinokuniya Book Store, Tokyo, 1972.
- [34] J. H. Chen. Compact 2-harmonic hypersurfaces in $\mathbb{S}^{n+1}(1)$. *Acta Math. Sinica*, 36(3):341–347, 1993.
- [35] Y. Chen and T. Li. Local rigidity of constant mean curvature hypersurfaces in space forms. *J. Math. Anal. Appl.*, 543(2):Paper No. 128974, 13, 2025.
- [36] Q. M. Cheng. The classification of complete hypersurfaces with nonzero constant mean curvature of space form of dimension 4. *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A*, 47(1):79–102, 1993.
- [37] Q. M. Cheng and Q. R. Wan. Hypersurfaces of space forms $M^4(c)$ with constant mean curvature. In *Geometry and global analysis (Sendai, 1993)*, pages 437–442. Tohoku Univ., Sendai, 1993.
- [38] S. Y. Cheng and S. T. Yau. Hypersurfaces with constant scalar curvature. *Math. Ann.*, 225(3):195–204, 1977.
- [39] S. S. Chern, M. do Carmo, and S. Kobayashi. Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length. In *Functional Analysis and Related Fields (Proc. Conf. for M. Stone, Univ. Chicago, Chicago, Ill., 1968)*, pages 59–75. Springer, New York-Berlin, 1970.
- [40] M. Dajczer and R. Tojeiro. *Submanifold theory*. Universitext. Springer, New York, 2019.
- [41] S. C. de Almeida, F. G. B. Brito, M. Scherfner, and S. Weiss. On the local version of the Chern conjecture: CMC hypersurfaces with constant scalar curvature in $\mathbb{S}^{n+1}$. *Kragujevac J. Math.*, 44(1):101–111, 2020.
- [42] G. de Rham. Sur la reductibilité d’un espace de Riemann. *Comment. Math. Helv.*, 26:328–344, 1952.



- [43] F. Defever. Hypersurfaces of $\mathbb{E}^4$ with harmonic mean curvature vector. *Math. Nachr.*, 196:61–69, 1998.
- [44] I. Dimitrić. Submanifolds of $\mathbb{E}^m$ with harmonic mean curvature vector. *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica*, 20(1):53–65, 1992.
- [45] M. P. do Carmo. *Riemannian geometry*. Mathematics: Theory & Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, portuguese edition, 1992.
- [46] J. Eells and J. H. Sampson. Énergie et déformations en géométrie différentielle. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 14:61–69, 1964.
- [47] J. Eells and J. H. Sampson. Harmonic mappings of Riemannian manifolds. *Amer. J. Math.*, 86:109–160, 1964.
- [48] J. Eells and J. H. Sampson. Variational theory in fibre bundles. In *Proc. U.S.-Japan Seminar in Differential Geometry (Kyoto, 1965)*, pages 22–33. Nippon Hyoronsha Co., Ltd., Tokyo, 1966.
- [49] J. Erbacher. Reduction of the codimension of an isometric immersion. *J. Differential Geometry*, 5:333–340, 1971.
- [50] A. Ferrández and P. Lucas. Null finite type hypersurfaces in space forms. *Kodai Math. J.*, 14(3):406–419, 1991.
- [51] D. Ferus, H. Karcher, and H. F. Münzner. Cliffordalgebren und neue isoparametrische Hyperflächen. *Math. Z.*, 177(4):479–502, 1981.
- [52] D. Fetcu, E. Loubeau, and C. Oniciuc. Bochner-Simons formulas and the rigidity of biharmonic submanifolds. *J. Geom. Anal.*, 31(2):1732–1755, 2021.
- [53] D. Fetcu, S. Nistor, and C. Oniciuc. On biconservative surfaces in 3-dimensional space forms. *Comm. Anal. Geom.*, 24(5):1027–1045, 2016.
- [54] D. Fetcu and C. Oniciuc. Biharmonic and biconservative hypersurfaces in space forms. In *Differential geometry and global analysis—in honor of Tadashi Nagano*, volume 777 of *Contemp. Math.*, pages 65–90. Amer. Math. Soc., [Providence], RI, 2022.
- [55] Y. Fu. Biharmonic hypersurfaces with three distinct principal curvatures in Euclidean space. *Tohoku Math. J. (2)*, 67(3):465–479, 2015.
- [56] Y. Fu. Biharmonic hypersurfaces with three distinct principal curvatures in spheres. *Math. Nachr.*, 288(7):763–774, 2015.
- [57] Y. Fu and M.-C. Hong. Biharmonic hypersurfaces with constant scalar curvature in space forms. *Pacific J. Math.*, 294(2):329–350, 2018.



- [58] Y. Fu, M.-C. Hong, D. Yang, and X. Zhan. Biconservative hypersurfaces with constant scalar curvature in space forms. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 204(3):1269–1292, 2025.
- [59] Y. Fu, M.-C. Hong, and X. Zhan. On Chen’s biharmonic conjecture for hypersurfaces in $\mathbb{R}^5$. *Adv. Math.*, 383:Paper No. 107697, 28, 2021.
- [60] Y. Fu, M.-C. Hong, and X. Zhan. Biharmonic conjectures on hypersurfaces in a space form. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 376(12):8411–8445, 2023.
- [61] Z. Guan, H. Li, and L. Vrancken. Four dimensional biharmonic hypersurfaces in nonzero space forms have constant mean curvature. *J. Geom. Phys.*, 160:Paper No. 103984, 15, 2021.
- [62] Th. Hasanis and Th. Vlachos. Hypersurfaces in $\mathbb{E}^4$ with harmonic mean curvature vector field. *Math. Nachr.*, 172:145–169, 1995.
- [63] T. Ichiyama, J. Inoguchi, and H. Urakawa. Bi-harmonic maps and bi-Yang-Mills fields. *Note Mat.*, 28:233–275, 2009 [2008 on verso].
- [64] T. Ichiyama, J. Inoguchi, and H. Urakawa. Classifications and isolation phenomena of bi-harmonic maps and bi-Yang-Mills fields. *Note Mat.*, 30(2):15–48, 2010.
- [65] S. Ishikawa. Biharmonic W -surfaces in 4-dimensional pseudo-Euclidean space. *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A*, 46(2):269–286, 1992.
- [66] G. Y. Jiang. 2-harmonic isometric immersions between Riemannian manifolds. *Chinese Ann. Math. Ser. A*, 7(2):130–144, 1986.
- [67] G. Y. Jiang. 2-harmonic maps and their first and second variational formulas. *Chinese Ann. Math. Ser. A*, 7(4):389–402, 1986.
- [68] G. Y. Jiang. The conservation law for 2-harmonic maps between Riemannian manifolds. *Acta Math. Sinica*, 30(2):220–225, 1987.
- [69] G. Y. Jiang. Some nonexistence theorems on 2-harmonic and isometric immersions in Euclidean space. *Chinese Ann. Math. Ser. A*, 8(3):377–383, 1987. An English summary appears in *Chinese Ann. Math. Ser. B* 8 (1987), no. 3, 389.
- [70] G. Y. Jiang. 2-harmonic maps and their first and second variational formulas. *Note Mat.*, 28:209–232, 2009. Translated from the Chinese by Hajime Urakawa.
- [71] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of differential geometry. Vol I*. Interscience Publishers (a division of John Wiley & Sons, Inc.), New York-London, 1963.



- [72] L. Lei, H. Xu, and Z. Xu. On the generalized Chern conjecture for hypersurfaces with constant mean curvature in a sphere. *Sci. China Math.*, 64(7):1493–1504, 2021.
- [73] H. Li. Hypersurfaces with constant scalar curvature in space forms. *Math. Ann.*, 305(4):665–672, 1996.
- [74] H. Li. Global rigidity theorems of hypersurfaces. *Ark. Mat.*, 35(2):327–351, 1997.
- [75] H. Li and G. Wei. Compact embedded rotation hypersurfaces of $\mathbb{S}^{n+1}$. *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)*, 38(1):81–99, 2007.
- [76] E. Loubeau, S. Montaldo, and C. Oniciuc. The stress-energy tensor for biharmonic maps. *Math. Z.*, 259(3):503–524, 2008.
- [77] E. Loubeau and C. Oniciuc. Biharmonic surfaces of constant mean curvature. *Pacific J. Math.*, 271(1):213–230, 2014.
- [78] E. Loubeau and C. Oniciuc. Constant mean curvature proper-biharmonic surfaces of constant Gaussian curvature in spheres. *J. Math. Soc. Japan*, 68(3):997–1024, 2016.
- [79] S. Montaldo, C. Oniciuc, and A. Pámpano. Closed biconservative hypersurfaces in spheres. *J. Math. Anal. Appl.*, 518(1):Paper No. 126697, 16, 2023.
- [80] S. Montaldo, C. Oniciuc, and A. Ratto. Biconservative surfaces. *J. Geom. Anal.*, 26(1):313–329, 2016.
- [81] S. Montaldo, C. Oniciuc, and A. Ratto. On cohomogeneity one biharmonic hypersurfaces into the Euclidean space. *J. Geom. Phys.*, 106:305–313, 2016.
- [82] S. Montaldo, C. Oniciuc, and A. Ratto. Proper biconservative immersions into the Euclidean space. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 195(2):403–422, 2016.
- [83] S. Montaldo and A. Pámpano. On the existence of closed biconservative surfaces in space forms. *Comm. Anal. Geom.*, 31(2):291–319, 2023.
- [84] S. Montiel and A. Ros. Compact hypersurfaces: the Alexandrov theorem for higher order mean curvatures. In *Differential geometry*, volume 52 of *Pitman Monogr. Surveys Pure Appl. Math.*, pages 279–296. Longman Sci. Tech., Harlow, 1991.
- [85] J. D. Moore. Isometric immersions of riemannian products. *J. Differential Geometry*, 5:159–168, 1971.
- [86] A. Moroianu and S. Moroianu. Ricci surfaces. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, 14(4):1093–1118, 2015.



- [87] H. F. Münzner. Isoparametrische Hyperflächen in Sphären. *Math. Ann.*, 251(1):57–71, 1980.
- [88] H. F. Münzner. Isoparametrische Hyperflächen in Sphären. II. über die Zerlegung der Sphäre in Ballbündel. *Math. Ann.*, 256(2):215–232, 1981.
- [89] S. Nistor. Biharmonic and biconservativity topics in the theory of submanifolds, PhD Thesis, Iași. 2017.
- [90] S. Nistor. On biconservative surfaces. *Differential Geom. Appl.*, 54:490–502, 2017.
- [91] S. Nistor, C. Oniciuc, N. C. Turgay, and R. Yeğin Şen. Biconservative surfaces in the 4-dimensional Euclidean sphere. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 202(5):2345–2377, 2023.
- [92] S. Nistor and M. Rusu. Intrinsic characterizations of biconservative surfaces in the four-dimensional hyperbolic space. *Mediterr. J. Math.*, 21(8):Paper No. 225, 27, 2024.
- [93] K. Nomizu. Characteristic roots and vectors of a differentiable family of symmetric matrices. *Linear and Multilinear Algebra*, 1(2):159–162, 1973.
- [94] K. Nomizu and B. Smyth. A formula of Simons’ type and hypersurfaces with constant mean curvature. *J. Differential Geometry*, 3:367–377, 1969.
- [95] M. Okumura. Hypersurfaces and a pinching problem on the second fundamental tensor. *Amer. J. Math.*, 96:207–213, 1974.
- [96] C. Oniciuc. Biharmonic maps between Riemannian manifolds. *An. Ştiinţ. Univ. Al. I. Cuza Iaşi. Mat. (N.S.)*, 48(2):237–248, 2002.
- [97] C. Oniciuc. Tangency and harmonicity properties. PhD Thesis. *Geometry Balkan Press, Bucharest*, 2003. <http://www.mathem.pub.ro/dgds/mono/dgdsmono.htm>.
- [98] C. Oniciuc. Biharmonic submanifolds in space forms. Habilitation Thesis. DOI: 10.13140/2.1.4980.5605, www.researchgate.net, 2012.
- [99] Y.-L. Ou and B.-Y. Chen. *Biharmonic submanifolds and biharmonic maps in Riemannian geometry*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2020.
- [100] H. Reckziegel and M. Schaaf. Decomposition theorems in differential geometry. In *Proceedings of the Third International Workshop on Differential Geometry and its Applications and the First German-Romanian Seminar on Geometry (Sibiu, 1997)*, volume 5, pages 347–369, 1997.



- [101] A. Ros. Compact hypersurfaces with constant scalar curvature and a congruence theorem. *J. Differential Geom.*, 27(2):215–223, 1988. With an appendix by Nicholas J. Korevaar.
- [102] P. J. Ryan. Homogeneity and some curvature conditions for hypersurfaces. *Tohoku Math. J. (2)*, 21:363–388, 1969.
- [103] P. J. Ryan. Hypersurfaces with parallel Ricci tensor. *Osaka Math. J.*, 8:251–259, 1971.
- [104] A. Sanini. Maps between Riemannian manifolds with critical energy with respect to deformations of metrics. *Rend. Mat. (7)*, 3(1):53–63, 1983.
- [105] T. Sasahara. Legendre surfaces in Sasakian space forms whose mean curvature vectors are eigenvectors. *Publ. Math. Debrecen*, 67(3-4):285–303, 2005.
- [106] M. Scherfner, S. Weiss, and S. T. Yau. A review of the Chern conjecture for isoparametric hypersurfaces in spheres. In *Advances in geometric analysis*, volume 21 of *Adv. Lect. Math. (ALM)*, pages 175–187. Int. Press, Somerville, MA, 2012.
- [107] J. Simons. Minimal varieties in riemannian manifolds. *Ann. of Math. (2)*, 88:62–105, 1968.
- [108] N. C. Turgay and A. Upadhyay. On biconservative hypersurfaces in 4-dimensional Riemannian space forms. *Math. Nachr.*, 292(4):905–921, 2019.
- [109] M. Vieira. Biharmonic hypersurfaces in hemispheres. *J. Math. Anal. Appl.*, 511(1):Paper No. 126068, 8, 2022.
- [110] X. F. Wang and L. Wu. Proper biharmonic submanifolds in a sphere. *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*, 28(1):205–218, 2012.
- [111] S. T. Yau. Submanifolds with constant mean curvature I. *Amer. J. Math.*, 96:346–366, 1974.
- [112] R. Yeğin Şen and N. C. Turgay. On biconservative surfaces in 4-dimensional Euclidean space. *J. Math. Anal. Appl.*, 460(2):565–581, 2018.
- [113] W. Zhang. New examples of biharmonic submanifolds in $\mathbb{C}P^n$ and $\mathbb{S}^{2n+1}$. *An. Ştiinţ. Univ. Al. I. Cuza Iaşi. Mat. (N.S.)*, 57(1):207–218, 2011.