

SUBIECTE PROBA 1 (PROBĂ SCRISĂ)

Varianta 2

Subiectul 1 (Algebră). Fie funcția $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_7$, dată prin $f(x) = \widehat{5} \cdot \widehat{x}$, pentru orice $x \in \mathbb{Z}$. Pentru $n \in \mathbb{N}$ oarecare, notăm $n\mathbb{Z} = \{n \cdot k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

- a) Fie $n \in \mathbb{N}$. Arătați că mulțimea $n\mathbb{Z}$ este un subgrup al grupului $(\mathbb{Z}, +)$.
- b) Arătați că f este un morfism de grupuri de la grupul $(\mathbb{Z}, +)$ la grupul $(\mathbb{Z}_7, +)$.
- c) Determinați nucleul $\text{Ker}(f)$ și imaginea $\text{Im}(f)$ ale lui f .
- d) Determinați ordinul și inversul elementului $f(1002)$ în grupul $(\mathbb{Z}_7^*, \cdot)$.

Subiectul 2 (Analiză). Fie funcția $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dată prin

$$f(x, y) = e^{-x \sin y}.$$

- a) Demonstrați că $e^x \geq x + 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și arătați că $f\left(-x, \frac{\pi}{2}\right) \geq x + 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
- b) Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(x, \frac{\pi}{2}\right) \cos x \, dx$.
- c) Să se studieze convergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty} n f\left(n, \frac{\pi}{2}\right)$ și să se determine suma seriei.
- d) Fie $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dată prin

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{f(-x, y) - 1}{y}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

- i) Să se arate că g este diferențiabilă în orice punct $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, cu $y \neq 0$, și să se scrie diferențiala lui g într-un astfel de punct.
- ii) Să se studieze continuitatea și existența derivatelor parțiale ale lui g în $(0, 0)$. Apoi, să se arate că g nu este diferențiabilă în $(0, 0)$.

Subiectul 3 (Geometrie). În spațiul euclidian tridimensional $\mathbb{R}^3$, se consideră curba parametrizată $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dată de expresia

$$c(t) = \left(\sqrt{2} \cos t, \sin t + at, \sin t - at \right),$$

unde $a > 0$.

- a) Calculați vectorul viteză $c'(t)$ și verificați dacă t este parametrul natural (i.e. parametrul lungime de arc) al curbei c .
- b) Determinați un vector constant nenul $w \in \mathbb{R}^3$ astfel încât unghiul θ format de vectorul viteză $c'(t)$ cu direcția lui w să nu depindă de parametrul t . Calculați $\cos \theta$.
- c) Determinați planul osculator π_0 al curbei parametrizate c în $t = 0$ și calculați distanța de la originea reperului $O(0, 0, 0)$ la π_0 .
- d) Verificați dacă există o valoare a parametrului t pentru care planul osculator (al curbei parametrizate c) să fie paralel cu planul xOy .
- e) Să se determine o valoare a constantei a pentru care c este o curbă plană.

Subiectul 4 (Informatică). O stație meteo înregistrează pentru o zonă de interes temperaturile medii pe zile. Acestea sunt furnizate prin intermediul unui fișier text „temperaturi.txt” în care pe prima linie este un număr natural nenul $N \leq 365$ reprezentând numărul de zile, iar pe cea de-a doua linie N numere întregi separate prin spații, reprezentând temperaturile medii pentru cele N zile.

Scrieți un program C++ complet în care să preluați valorile din fișierul „temperaturi.txt”, apoi implementați și apelați corespunzător funcțiile de mai jos. Pentru toate aceste funcții parametrul n este un număr natural nenul ($n \leq 365$) ce reprezintă numărul efectiv de elemente din tabloul unidimensional v (vector cu maximum 365 de componente numere întregi).

- a) `void nrZileTempMax(int n, int v[]) {...}`
Funcția afișează în consolă indicii corespunzători valorii maxime din tabloul v .
- b) `void sortareTemperaturi(int n, int v[]) {...}`
Funcția ordonează descrescător elementele tabloului v , utilizând un algoritm valid de sortare. Rezultatul este returnat tot prin intermediul vectorului v .
- c) `int cautaBinarTemperatura(int n, int v[], int temperaturaCautata) {...}`
Funcția utilizează algoritmul de căutare binară pentru a găsi valoarea `temperaturaCautata` în tabloul v , returnând indicele poziției sale (de la 0 la $n - 1$). Dacă temperatura căutată nu există în tablou, funcția returnează valoarea -1 . Această funcție lucrează pe un vector v ordonat descrescător în prealabil.
- d) `int lungimeMaximaIntervalTemperaturiStabile(int n, int v[], int P) {...}`
Numim *perioadă cu temperaturi stabile* o secvență de minim 2 zile consecutive pentru care variația temperaturilor dintre oricare două zile nu depășește pragul P (adică $|v[i] - v[j]| \leq P$, unde i, j sunt indici din secvență). Funcția returnează lungimea maximă a unei astfel de secvențe din vectorul v , iar dacă nu există nicio secvență cu lungimea de cel puțin 2 elemente care să respecte regula, returnează valoarea 0.