

”Alexandru Ioan Cuza” University of Iași
Faculty of Mathematics

Habilitation thesis

**Mathematical modelling in Celestial and
Continuum Mechanics**

Author: Cătălin Gales

Iași, 2018

To my family.

Table of contents

Abstract	1
Abstract–English version	2
Rezumat–versiunea în limba română	5
Part 1. Scientific achievements	9
0.1. Introduction	10
Chapter 1. Celestial Mechanics. Dynamics of space debris	17
1.1. Equations of motion	17
1.1.1. The model in the Cartesian framework	17
1.1.2. Hamiltonian formulation	21
1.1.3. Types of resonances	25
1.2. Gravitational resonances	27
1.2.1. Dynamics of resonances in MEO and GEO	28
1.2.2. Dynamics of resonances and equilibria in LEO	33
1.2.3. Dynamics of high area–to–mass ratio space debris	40
1.3. Lunisolar secular resonances	41
1.3.1. Overlapping of secular resonances	43
1.3.2. Bifurcations	48
Chapter 2. Continuum Mechanics. Mathematical study of classical and generalized continuum models	53
2.1. Spatial behavior in linear viscoelasticity	53
2.1.1. Formulation of the problem	53
2.1.2. Spatial behavior	56
2.2. Electromagnetic effects in media with microstructure	60
2.2.1. Micromorphic piezoelectricity	60
2.2.1.1. Basic equations	61
2.2.1.2. Uniqueness	63
2.2.1.3. Continuous dependence of solutions	68
2.2.1.4. Asymptotic partition	69
2.2.1.5. The equilibrium theory. An existence result	73
2.2.1.6. The equilibrium theory. Effect of a concentrated charge density	75
2.2.2. Electromagnetic effects in microstretch elasticity	79
2.2.2.1. Basic formulation	79
2.2.2.2. Hypotheses and preliminary results	82
2.2.2.3. Spatial behavior	85

2.2.2.4. The effect of a concentrated microstretch body force	90
2.3. A mixture theory for micropolar thermoelastic solids	95
2.3.1. Kinematics	96
2.3.2. Basic laws	99
2.3.3. Constitutive equations	104
2.3.4. The linear theory	106
2.3.5. Uniqueness theorem	110
Part 2. Further possible developments	113
2.4. Research directions in Celestial Mechanics	114
2.5. Research directions in Continuum Mechanics	117
Bibliography	119

Abstract

Abstract—English version

The aim of this thesis is to summarize the scientific results obtained by the author since his PhD thesis defence in 2003, as well as to provide a description of some possible research directions that will be approached in the near future. Accordingly, the thesis contains two parts; the first part presents some results obtained by the author, alone or in collaboration, while the second part discusses some open problems and a research plan designed to approach these problems.

The author's research is focused on mathematical modeling in Celestial Mechanics and Continuum Mechanics, a topic of large interest both from theoretical and practical perspectives. In fact, there is a growing need of mathematical modeling in each branch of science, motivated by the flourish of many new open problems that emerged with the technological development. In particular, Celestial Mechanics and Continuum Mechanics are called to find answers to a large number of challenges and issues that have arisen mainly with the beginning of space age. These challenges lead to the necessity of elaborating adequate models and to extend the existing theories. So, new models and new analytical and numerical tools are continuously developed to characterize qualitatively and quantitatively various physical phenomena. The part describing the author's scientific achievements is split in two chapters. Chapter 1 includes some studies in the field of Celestial Mechanics, where a particular emphasis is put on the space debris dynamics, whereas Chapter 2 contains some results in Continuum Mechanics concerning the linear viscoelasticity, the theory of elastic media with microstructure and the theory of mixtures.

Before we start describing the results, let us provide a motivation of the research themes presented here.

In Celestial Mechanics, the dynamics of small bodies around the Earth has gained a renewed interest, since the awareness of the problems that space debris can cause in the next decades. While, on one hand, the increased development of space activities has been beneficial for our everyday life, general economy and the advancement of science, on the other hand, the exploitation of space environment has quickly become unsustainable. Space Launch Report archive lists a total of 5609 launches between 4th October 1957 and 31th December 2016, which deployed more than 7500 spacecraft and satellites. The intense exploitation of circumterrestrial space generates inevitably a lot of space debris, namely a huge collection of uncontrolled human-made objects in orbit around the Earth. Space debris include spent rocket bodies and non-operative satellites, but also fragments generated by destructive events (such as collisions and explosions). In fact, more than 23 000 objects with size larger than 10 cm are being regularly tracked by the U.S. Space Surveillance Network, of which approximately 95% are space debris and the rest 5% are operational satellites. The proliferation of this crowd of space debris is now realized to be an important threat to current and future missions, and a concrete source of risk for human operated spacecraft. Modelling various perturbations, studying the effects of resonances, determining the equilibrium points and the stable or chaotic regimes are nowadays mandatory. Such information is crucial for determining graveyard orbits, defining end-of-life disposal strategies, predicting the evolution of debris clouds,

and also for an optimal combination of various concepts for debris removal in order to reduce the total time or the total cost of the action.

In Continuum Mechanics, the author's research falls in the domain of generalized continuum mechanics, albeit some papers deal with classical Cauchy theories (viscoelasticity, piezoelectricity, magneto-electroelasticity). The need of generalized continuum models is coming from practice – the complex material behaviour cannot be described in all cases by classical theories. At microscopic scale, the nature is not continua. It has structure and usually is a mixture consisting of constituents having different physical and chemical properties. When a constituent prevail, the influences caused by the others can be neglected. This is not possible when the constituents are dense one in other. On the other hand, the material can have microstructure, being composed by macromolecules or crystals. Continuum Mechanics answered to these challenges by formulating two theories, namely: the theory of media with microstructure and the theory of mixtures. Although, the starting point was the monograph of the Cosserat brothers from 1909, *Théorie des corps déformables*, and some previous works of such famous scientists like Lord Kelvin, the Mechanics of Generalized Continua has become an established research topic since the end of the 50s – early 60s of the last century. A non-exhaustive list of applications of the generalized continuum models includes: nanomaterials, auxetic materials, nanoscale thermal devices, composites as mixtures, polymers with deformable molecules, solids with deformable granules and pores, live tissues (muscles and bones), suspensions and crystals, etc. In this context of the Generalized Continuum Mechanics, a relatively new topic is the modeling of the interaction between electromagnetic fields with deformable bodies with inner structure. The interest is motivated by the capability of many natural and synthetic materials to directly convert electromagnetic energy in mechanical energy and vice versa. Thus, several recent works are dedicated to formulate electromagnetic theories for elastic bodies with inner structure.

In the last 14 years, the author has studied various topics in the research areas described above, the results being published in more than 35 papers and 6 book Chapters. The Scientific achievements part contains some ideas underpinning these works.

Thus, Chapter 1 makes a summary of our results regarding the dynamical evolution of Earth-orbiting objects. Section 1.1 provides a systematic exposition of the main analytical and numerical tools used to describe the dynamics of space debris. The Cartesian setting (see Section 1.1.1) has a special role in numerical simulations, since one can propagate all effects (the gravitational attraction of the Earth, the air drag, the Earth's oblateness, the attraction of the Moon, the influence of the Sun and the solar radiation pressure). A Hamiltonian approach using Delaunay variables (see Section 1.1.2) leads naturally to the determination of the location and stability of resonances, which are of paramount importance for the analysis of the long-term evolution. This approach allows also to distinguish between different types of resonances. In fact, there are two types of resonances affecting the motion of space debris: *tesseral resonances*, occurring when there is a commensurability between the Earth's rotation period and the orbital period of the space debris, and *lunisolar secular resonances*, which account for all possible resonances involving a third-body perturber. Section 1.2 describes the effects of tesseral resonances,

while Section 1.3 deals with lunisolar secular resonances. Our approach provide a qualitative and quantitative description of various dynamical phenomena, like overlapping of resonances, the shift of equilibria along some axes as effect of the atmospheric drag, the onset of chaos, the bifurcation of equilibria, etc.

Chapter 2 describes several results obtained by the author of this thesis in linear viscoelasticity, theory of media with microstructure and theory of mixtures. More precisely, Section 2.1 presents some results characterizing the spatial behavior of solutions describing harmonic vibrations in a viscoelastic cylinder. One proves that dissipative effects assure the validity of results for every value of the frequency of vibration and for the class of viscoelastic materials compatible with thermodynamics. The electromagnetic effects in media with microstructure are considered in Section 2.2. We specifically present a mathematical study of the theory of micromorphic piezoelectricity (Section 2.2.1) and of the electromagnetic theory of microstretch elasticity (Section 2.2.2). This study includes the following aspects: uniqueness, existence and continuous dependence of solutions, asymptotic partition of energy, spatial behavior, effects of a concentrated microstretch body force. Section 2.3 presents in detail a nonlinear theory of heat-conducting micropolar mixtures in Lagrangian description. The kinematics, balance laws and constitutive equations are examined and used to develop a nonlinear theory for binary mixtures of micropolar thermoelastic solids. The initial boundary value problem is formulated. Then, the theory is linearized and a uniqueness result is established.

Part 2 contains some open problems and a research plan designed to approach these problems. A bibliography consisting of 140 titles ends the thesis.

Rezumat-versiunea în limba română

Scopul acestei teze este de a prezenta principalele rezultate științifice obținute de autor după momentul susținerii tezei de doctorat în 2003, și de a descrie unele direcții posibile de cercetare care vor fi abordate în viitorul apropiat. În consecință, teza conține două părți; prima parte prezintă câteva rezultate obținute de autor, singur sau în colaborare, în timp ce în partea a doua sunt discutate o serie de probleme deschise și este prezentat un plan de cercetare destinat abordării acestor probleme.

Cercetările autorului sunt dedicate modelării matematice în Mecanica Cerească și în Mecanica Mediilor Continue, un subiect de mare interes atât din perspectivă teoretică, cât și din punct de vedere practic. De fapt, modelarea matematică este necesară în fiecare ramură a științei, fiind motivată de numeroasele probleme deschise apărute odată cu dezvoltarea tehnologică. În particular, Mecanica Cerească și Mecanica Mediilor Continue sunt provocate să găsească răspunsuri la numărul mare de probleme apărute în principal odată cu începutul erei spațiale. Aceste provocări duc la elaborarea unor noi modele matematice și la extinderea teoriilor existente. Astfel, noi modele, metode analitice și numerice sunt dezvoltate continuu pentru a caracteriza calitativ și cantitativ diverse fenomene fizice. Realizările științifice ale autorului sunt împărțite în două capitole. Capitolul 1 include studii în domeniul Mecanicii Cerești referitoare la dinamica deșeurilor spațiale, în timp ce Capitolul 2 conține o serie de rezultate importante obținute în Mecanica Mediilor Continue privind viscoelasticitatea liniară, teoria mediilor cu microstructură și teoria mixturilor.

Înainte de a începe descrierea rezultatelor, vom oferi mai întâi o motivație a temelor de cercetare abordate în cadrul tezei.

În Mecanica Cerească, studiul dinamicii corpurilor infinitezimale, care orbitează în jurul Pământului, a dobândit un interes reînnoit odată cu conștientizarea problemelor pe care le pot provoca deșeurile spațiale în deceniile următoare. În timp ce, pe de o parte, dezvoltarea rapidă a activității spațiale este benefică pentru viața noastră de zi cu zi, economie și progresul științei, pe de altă parte, exploatarea mediului spațial a devenit rapid nesustenabilă. Cele peste 5600 de lansări între 4 octombrie 1957 și 31 decembrie 2016, au trimis în spațiu mai mult de 7500 nave cosmice și sateliți. Exploatarea intensă a spațiului circumterestru generează în mod inevitabil o mulțime de deșeuri spațiale, și anume o colecție imensă de obiecte necontrolate produse de om și aflate în mișcare în jurul Pământului. Deșeurile spațiale includ rachete uzate și sateliți neoperaționali, dar și fragmente generate de evenimente distructive (cum ar fi coliziunile și exploziile). De fapt, mai mult de 23 000 de obiecte cu dimensiuni mai mari de 10 cm sunt urmărite în mod regulat de către U.S. Space Surveillance Network, din care aproximativ 95 % sunt deșeuri spațiale, iar restul de 5 % sunt sateliți operaționali. Proliferarea acestei mulțimi de deșeuri spațiale reprezintă o amenințare importantă pentru misiunile spațiale actuale și viitoare. Modelarea diferitelor perturbații, studierea efectelor rezonanțelor, determinarea punctelor de echilibru și a regimurilor stabile sau haotice sunt acum obligatorii. Astfel de informații sunt esențiale pentru determinarea orbitelor cimitir, definirea strategiilor de eliminare a deșeurilor spațiale, prezicerea evoluției mulțimilor de deșeuri și, de asemenea, pentru combinarea optimă a diferitelor concepte pentru îndepărtarea

deșeurilor, fie pentru a reduce timpul total de eliminare fie pentru a reduce costul total al acțiunii de eliminare.

În Mecanica Mediilor Continue, cercetările autorului se încadrează în domeniul Mecanicii Mediilor Continue Generalizate, deși unele lucrări tratează probleme din teoriile clasice de tip Cauchy (vîscoelasticitate, piezoelectricitate, magneto-electroelasticitate). Practica impune necesitatea introducerii unor modele continue generalizate – comportarea mecanică complexă a unor materiale nu poate fi descrisă în toate cazurile de teoriile clasice. La scară microscopică, natura nu este continuă. Are microstructură și, de obicei, este un amestec format din constituenți având proprietăți fizice și chimice diferite. Când un constituent prevalează, influențele cauzate de ceilalți constituenți pot fi neglijate. Acest lucru nu este posibil atunci când constituenții sunt denși unul în celălalt. Pe de altă parte, materialul poate avea microstructură, fiind compus din macromolecule sau cristale. Mecanica Mediilor Continue a răspuns acestor provocări prin formularea a două teorii, și anume: teoria materialelor cu microstructură și teoria mixturilor. Deși punctul de plecare a fost monografia fraților Cosserat din 1909, *Théorie des corps déformables*, și a unor lucrări anterioare ale unor oameni de știință celebri precum Lordul Kelvin, Mecanica Mediilor Continue Generalizate a devenit un subiect de cercetare bine stabilit la sfârșitul anilor 50 - începutul anilor 60 ai secolului trecut. O listă neexhaustivă de aplicații a modelelor generalizate include: nanomateriale, dispozitivele termice nanometrice, materialele compozite, polimerii cu molecule deformabile, solidele cu granule deformabile și pori, țesuturile vii (mușchii și oasele), suspensiile și cristalele, etc. În acest context al mediilor continue generalizate, un subiect relativ nou este modelarea interacțiunii dintre câmpul electromagnetic și corpurile deformabile cu structură internă. Interesul este motivat de capacitatea multor materiale naturale și sintetice de a converti direct energia electromagnetică în energie mecanică și invers. Astfel, unele lucrări recente sunt dedicate fundamentării teoriilor electromagnetice pentru corpurile elastice cu structură internă.

În ultimii 14 ani, autorul a studiat diverse subiecte din domeniile de cercetare descrise mai sus, rezultatele fiind publicate în peste 35 de lucrări și 6 capitole de cărți. Partea tezei care prezintă realizările științifice conține câteva idei care stau la baza acestor lucrări.

Astfel, Capitolul 1 prezintă o serie de rezultate privind evoluția dinamică a deșeurilor spațiale. Secțiunea 1.1 oferă o expunere sistematică a principalelor abordări analitice și numerice utilizate. Coordonatele carteziane (Secțiunea 1.1.1) joacă un rol special în simulările numerice deoarece în acest cadru se pot studia numeric toate efectele (atracția gravitațională a Pământului, forța de rezistență a aerului, nesfericitatea Pământului, atracția Lunii, influența Soarelui și presiunea radiației solare). Abordarea hamiltoniană care utilizează variabilele Delaunay (Secțiunea 1.1.2) conduce în mod natural la determinarea poziției și stabilității rezonanțelor, care sunt de o importanță capitală pentru analiza dinamicii pe termen lung. Această abordare permite distingerea între diferitele tipuri de rezonanțe. De fapt, există două tipuri de rezonanțe care influențează mișcarea deșeurilor spațiale: *rezonanțele gravitaționale*, acestea apar atunci când există o comensurabilitate între perioada de rotație a Pământului și perioada orbitală a deșeurilor spațiale și *rezonanțele lunisolare seculare*, care reprezintă toate rezonanțele posibile care implică un al treilea corp perturbator. Secțiunea 1.2 descrie efectele rezonanțelor gravitaționale, în timp ce Secțiunea 1.3 tratează rezonanțele lunisolare seculare. Abordarea noastră oferă

o descriere calitativă și cantitativă a diferitelor fenomene dinamice, cum ar fi: suprapunerea rezonanțelor, schimbarea poziției punctelor de echilibru, producerea mișcărilor haotice, fenomene de bifurcație, etc.

Capitolul 2 descrie câteva rezultate obținute de autorul acestei teze în vîscoelasticitatea liniară, teoria materialelor cu microstructură și teoria mixturilor. Mai precis, Secțiunea 2.1 prezintă o serie de rezultate care caracterizează comportarea spațială a soluțiilor care descriu vibrațiile armonice într-un cilindru vîscoelastic. Se arată că efectele de disipare asigură valabilitatea rezultatelor pentru fiecare valoare a frecvenței vibrațiilor și pentru clasa materialelor vîscoelastice compatibile cu principiile termodinamice. În Secțiunea 2.2 sunt considerate efectele electromagnetice în mediile cu microstructură. Prezentăm în mod specific un studiu matematic al teoriei piezoelectricității micromorfe (Secțiunea 2.2.1) și al teoriei electromagnetice a medilor elastice cu microdilatări (Secțiunea 2.2.2). Acest studiu include următoarele aspecte: unicitatea, existența și dependența continuă a soluțiilor, partiția asimptotică a energiei, comportarea spațială, efectele cauzate de o forță masică concentrată. Secțiunea 2.3 prezintă în detaliu o teorie neliniară a mixturilor micropolare în descrierea Lagrangiană. Sunt examinate cinematica, principiile termodinamice și ecuațiile constitutive, în vederea introducerii unei teorii neliniare pentru amestecurile binare formate din materiale micropolare termoelastice. Este formulată problema la limită și cu valori inițiale. Apoi, teoria este liniarizată și este stabilit un rezultat de unicitate.

Partea a doua prezintă câteva probleme deschise și un plan de cercetare conceput pentru a aborda aceste probleme. O bibliografie formată din 140 de titluri finalizează prezenta teză.