

Fiind dat  $x \in \mathbb{R}$ , notăm cu  $[x]$  cel mai mare număr întreg care nu-l depășește pe  $x$ , număr numit *partea întreagă* a lui  $x$ , și notăm cu  $\{x\}$  diferența  $\{x\} = x - [x]$ , numită *partea fracționară* a lui  $x$ . Sunt evidente următoarele caracterizări:

$$[x] = n \Leftrightarrow n \in \mathbb{Z} \text{ și } x \in [n, n+1),$$

și

$$\{x\} = \alpha \Leftrightarrow \alpha \in [0, 1) \text{ și } x - \alpha \in \mathbb{Z}.$$

Amintim și echivalențele

$$\{x\} = \{y\} \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}, \quad \{x\} = x \Leftrightarrow [x] = 0.$$

1. Arătați că, pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ , are loc egalitatea  $\{x + y\} = \{\{x\} + \{y\}\}$ .

*Rezolvare.*  $\{x + y\} = \{[x] + \{x\} + [y] + \{y\}\} = \{\{x\} + \{y\}\}.$

2. Arătați că, pentru orice  $n \in \mathbb{Z}$  și  $x \in \mathbb{R}$ , are loc egalitatea  $\{nx\} = \{n\{x\}\}$ .

*Rezolvare.*  $\{nx\} = \{n([x] + \{x\})\} = \{n[x] + n\{x\}\} = \{n\{x\}\}.$

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\{x^2\} = \{x\}^2$ .

*Rezolvare.* Pentru orice  $x \in \mathbb{R}$  notăm  $n = [x]$  și  $\alpha = \{x\}$ . Avem  $\{x^2\} = \{(n + \alpha)^2\} = \{n^2 + 2n\alpha + \alpha^2\} = \{2n\alpha + \alpha^2\}$  și  $\{x\}^2 = \alpha^2 = \{\alpha^2\}$ . Rezultă că  $x$  este o soluție a ecuației  $\{x^2\} = \{x\}^2$  dacă și numai dacă  $2n\alpha \in \mathbb{Z}$ .

Sunt posibile numai două cazuri: dacă  $n = 0$  atunci pentru orice  $\alpha \in [0, 1)$  avem  $2n\alpha = 0 \in \mathbb{Z}$  și deci orice  $x \in [0, 1)$  este soluție, iar dacă  $n \neq 0$  atunci din echivalența

$$2n\alpha \in \mathbb{Z} \text{ cu } \alpha \in [0, 1) \Leftrightarrow \alpha = \frac{k}{2|n|}, k = 0, 1, 2, \dots, 2|n| - 1,$$

rezultă că soluțiile  $x$  cu  $[x] \neq 0$  ale ecuației date sunt toate numerele de forma

$$x = n + \frac{k}{2|n|},$$

cu  $n \in \mathbb{Z}^*$  și  $k = 0, 1, 2, \dots, 2|n| - 1$ .

4. Arătați că în șirul

$$\{a\}, \{2a\}, \{3a\}, \dots, \{na\}, \dots, \quad (1)$$

apar numai un număr finit de valori distincte dacă și numai dacă  $a$  este număr rațional.

*Rezolvare.* Presupunem că șirul are un număr finit de valori distincte, atunci există  $n$  și  $p > 0$  în  $\mathbb{N}$  astfel încât  $\{na\} = \{(n + p)a\}$ , de unde urmează că  $(n + p)a - na = pa = q \in \mathbb{Z}$ , deci  $a = q/p \in \mathbb{Q}$ .

Reciproc, dacă  $a$  este rațional,  $a = q/p$ ,  $q \in \mathbb{Z}$ ,  $p \in \mathbb{N}^*$ , atunci rezultă exact ca mai sus că  $\{na\} = \{(n + p)a\}$  pentru orice  $n$  natural, deci șirul (1) este periodic cu perioada  $p$  și are cel mult  $p$  valori distincte.

5. Fie  $a \in \mathbb{Q}$ . Arătați că ori toate valorile șirului

$$\{a\}, \{a^2\}, \{a^3\}, \dots, \{a^n\}, \dots, \quad (2)$$

sunt distincte între ele, ori toate sunt nule.

*Rezolvare.* Cazul valorilor nule corespunde lui  $a \in \mathbb{Z}$ . Fie acum  $a \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ . Vom arăta că valorile șirului sunt distincte două câte două. Presupunem prin reducere la absurd că există două valori egale, adică există  $n, m \in \mathbb{N}$  cu  $m > 0$  astfel încât  $\{a^n\} = \{a^{n+m}\}$ . Rezultă imediat că  $a^n(a^m - 1) \in \mathbb{Z}$ . Fie  $a = \frac{q}{p}$ , cu  $q, p \in \mathbb{Z}$ ,  $p \geq 2$ , exprimarea lui  $a$  ca fracție ireductibilă. Urmează că

$$\frac{q^n(q^m - p^m)}{p^{n+m}} \in \mathbb{Z},$$

adică  $p^{n+m}$  este un divizor al produsului  $q^n(q^m - p^m)$ . Fie  $p_0$  un factor prim al lui  $p$ . Deoarece fracția  $\frac{q}{p}$  a fost aleasă ireductibilă, rezultă că  $p_0$  nu apare în descompunerea în factori primi nici a lui  $q$ , nici a lui  $q^m$ , nici a lui  $q^m - p^m$ , și deci  $p^{n+m}$  nu poate fi un divizor al lui  $q^n(q^m - p^m)$ . Am obținut contradicția căutată.

6. Arătați că șirul

$$\{\sqrt{1}\}, \{\sqrt{2}\}, \{\sqrt{3}\}, \dots, \{\sqrt{n}\}, \dots, \quad (3)$$

are o infinitate de valori distincte.

*Rezolvare.* Deoarece pentru orice  $m \in \mathbb{N}^*$  avem

$$0 < \sqrt{m^2 + 1} - m = \frac{1}{\sqrt{m^2 + 1} + m} < 1,$$

rezultă că

$$\{\sqrt{m^2 + 1}\} = \frac{1}{\sqrt{m^2 + 1} + m}.$$

Deoarece are loc implicația evidentă

$$m < p \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{m^2 + 1} + m} > \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1} + p},$$

rezultă că au loc inegalitățile

$$\{\sqrt{1^2 + 1}\} > \{\sqrt{2^2 + 1}\} > \{\sqrt{3^2 + 1}\} > \dots > \{\sqrt{m^2 + 1}\} > \dots,$$

și deci măcar aceste valori din șirul (3) sunt distincte între ele.

7. Arătați că, oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}^*$ , are loc inegalitatea

$$\{\sqrt{1}\} + \{\sqrt{2}\} + \{\sqrt{3}\} + \dots + \{\sqrt{n}\} \geq \frac{2([\sqrt{n}] - 1)}{\sqrt{3} + 1}. \quad (4)$$

*Rezolvare.* Deoarece

$$0 < \sqrt{m^2 + 2m} - m = \frac{2m}{\sqrt{m^2 + 2m} + m} < 1,$$

rezultă că, pentru orice  $m \in \mathbb{N}^*$ , avem

$$\{\sqrt{(m+1)^2 - 1}\} = \{\sqrt{m^2 + 2m}\} = \frac{2m}{\sqrt{m^2 + 2m} + m} = \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{m}} + 1} > \frac{2}{\sqrt{3} + 1}.$$

Pentru  $n = 1, 2$  sau  $3$  relația (4) se verifică direct. Fie  $n \geq 4$ . Notăm  $p = [\sqrt{n}]$  și avem  $p \geq 2$  cu  $p^2 \leq n < (p+1)^2$ . În suma  $\{\sqrt{1}\} + \{\sqrt{2}\} + \{\sqrt{3}\} + \dots + \{\sqrt{n}\}$  apar următorii  $p-1$  termeni

$$\{\sqrt{2^2 - 1}\}, \{\sqrt{3^2 - 1}\}, \dots, \{\sqrt{p^2 - 1}\}$$

despre care am arătat că sunt mai mari decât  $2/(\sqrt{3}+1)$ , de unde rezultă inegalitatea dorită

8. Arătați că șirul

$$\{\sqrt{1}\}, \{\sqrt{2}\}, \{\sqrt{3}\}, \dots, \{\sqrt{n}\}, \dots, \quad (5)$$

are cel puțin o valoare în orice subintervalul  $(\alpha, \beta) \subset (0, 1)$ .

*Rezolvare.* Pentru orice  $m \in \mathbb{N}$  avem

$$[\sqrt{m^2}] = [\sqrt{m^2 + 1}] = [\sqrt{m^2 + 2}] = \dots = [\sqrt{m^2 + 2m}] = m$$

de unde obținem că

$$0 = \{\sqrt{m^2}\} < \{\sqrt{m^2 + 1}\} < \{\sqrt{m^2 + 2}\} < \dots < \{\sqrt{m^2 + 2m}\} < 1.$$

Concluzia rezultă după ce se arată că diferențele dintre oricare doi termeni consecutivi din șirul de mai sus sunt mai mici decât  $1/2m$  și deci, pentru  $m$  suficient de mare, intervalul  $(\alpha, \beta)$  este prea lung ca să încapă între doi termeni consecutivi.