

Clasa a IX-a

I. Scopul problemei de mai jos este de a prezenta aplicații la *teorema împărțirii cu rest, algoritmul lui Euclid* și de a demonstra *lema chineză a resturilor*.

Fie $a, b, d \in \mathbb{Z}$. Spunem că d este *cel mai mare divizor comun (cmmdc)* al lui a și b dacă $d \mid a$, $d \mid b$ și $\forall d' \in \mathbb{Z}, d' \mid a$ și $d' \mid b \Rightarrow d' \mid d$. Notăm cu (a, b) un cel mai mare divizor comun al lui a și b .

Fie un predicat $P(n)$, $n \in \mathbb{N}$. O variantă la *Principiul de demonstrație prin inducție* afirmă că, pentru a demonstra că $P(n)$ este adevărată, $\forall n \in \mathbb{N}$, este suficient să demonstrăm:

$\forall n \in \mathbb{N}$, presupunând că $P(k)$ este adevărată pentru orice $k < n$, rezultă că $P(n)$ adevărată.

a) Fie $b \in \mathbb{N}, b \neq 0$. Demonstrați (prin inducție după a) *teorema împărțirii cu rest în $\mathbb{N}$* :

$$\forall a \in \mathbb{N}, \exists q, r \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } a = bq + r \text{ și } r = 0 \text{ sau } |r| < |b|.$$

b) Demonstrați *teorema împărțirii cu rest în $\mathbb{Z}$* : Pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \Rightarrow \exists q, r \in \mathbb{Z}$ astfel încât $a = bq + r$ și $r = 0$ sau $|r| < |b|$.

c) Fie $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$. *Algoritmul lui Euclid* constă în următorul șir de împărțiri cu rest:

$$a = bq_1 + r_1, \quad 0 < r_1 < |b| \tag{1}$$

$$b = r_1q_2 + r_2, \quad 0 < r_2 < r_1 \tag{2}$$

...

$$r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n, \quad 0 < r_n < r_{n-1} \tag{n-2}$$

$$r_{n-1} = r_nq_{n+1} + r_{n+1}, \quad r_{n+1} = 0 \tag{n-1}$$

Demonstrați că:

- Există într-adevăr $n \in \mathbb{N}$ cu $r_{n+1} = 0$.
- $r_n \mid r_k$, $\forall k$ și $r_n \mid b$, $r_n \mid a$.
- Dacă $d \mid a$, $d \mid b$, atunci $d \mid r_k$, $\forall k$.

Deduceți că *ultimul rest nenul* r_n este un cmmdc al a și b .

d) Demonstrați că, pentru orice k , există $u_k, v_k \in \mathbb{Z}$ astfel încît $r_k = u_k a + v_k b$. Deduceți următoarea teoremă:

Pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}$, fie $d \in \mathbb{N}, d = (a, b)$. Atunci există $u, v \in \mathbb{Z}$ astfel încît $d = au + bv$. Mai mult, dacă a, b nu sînt ambele nule,

$$d = \min \{ au + bv \mid au + bv > 0, u, v \in \mathbb{Z} \}.$$

e) Fixăm $n \in \mathbb{Z}$ și fie $x, y \in \mathbb{Z}$. Spunem că $x \equiv y \pmod{n}$ dacă $n \mid x - y$. Demonstrați că, $\forall x, y, x', y' \in \mathbb{Z}$, dacă $x \equiv x' \pmod{n}$, $y \equiv y' \pmod{n}$, atunci $x + y \equiv x' + y' \pmod{n}$ și $xy \equiv x'y' \pmod{n}$.

f) Demonstrați că, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, are loc:

$$(a, b) = 1 \Leftrightarrow \exists u \in \mathbb{Z} \text{ astfel încît } au \equiv 1 \pmod{b}.$$

g) Găsiți $u \in \mathbb{N}$ astfel încît $500u \equiv 1 \pmod{2013}$.

h) Fie $a, b \in \mathbb{Z}$, $(a, b) = 1$ și $u, v \in \mathbb{Z}$ cu $au + bv = 1$. Fie $r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$ și fie $x = r_2 au + r_1 bv$. Demonstrați că $x \equiv r_1 \pmod{a}$ și $x \equiv r_2 \pmod{b}$.

i) Găsiți toate numerele $x \in \mathbb{Z}$ astfel încît $x \equiv 2000 \pmod{2013}$ și $x \equiv 69 \pmod{500}$.

j) Demonstrați *Lema chineză a resturilor*: Fie $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$, prime două cîte două (adică $(a_i, a_j) = 1$ dacă $i \neq j$). Atunci $\forall r_1, \dots, r_n \in \mathbb{Z}$, există $r \in \mathbb{Z}$ astfel încît $r \equiv r_1 \pmod{a_1}, \dots, r \equiv r_n \pmod{a_n}$.

k) Dați un contraexemplu care să arate că ipoteza " $a_1, \dots, a_n$ sînt prime două cîte două" este esențială.

II. Se consideră în plan trei puncte necoliniare A, B, C . Scopul acestui exercițiu este de a arăta existența și de a construi trei puncte A', B', C' astfel încât

- (i) A' este mijlocul segmentului $[BC']$;
- (ii) B' este mijlocul segmentului $[CA']$;
- (iii) C' este mijlocul segmentului $[AB']$.

Observație. Un reper în plan este un triplet $(O, \vec{a}, \vec{b})$ format dintr-un punct O și doi vectori liberi necoliniari $\vec{a}, \vec{b}$ (în particular nenuli). Orice vector liber $\vec{u}$ poate fi reprezentat cu originea în O : $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$. În particular,

vectorii reperului pot fi reprezentat cu originea în O : $\vec{a} = \overrightarrow{OO'}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OO''}$. Orice vector liber $\vec{u}$ poate fi scris ca o combinație liniară a vectorilor reperului: $\vec{u} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Deci $\overrightarrow{OM} = \alpha \overrightarrow{OO'} + \beta \overrightarrow{OO''}$. Perechea de numere reale (α, β) reprezintă *coordonatele punctului M în raport cu reperul dat*.

Se consideră reperul $\mathcal{R} = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Presupunem că în raport cu acest reper punctele A', B', C' au coordonatele $A'(a_1, a_2), B'(b_1, b_2), C'(c_1, c_2)$.

1. Precizați coordonatele punctelor A, B, C în reperul $\mathcal{R}$.
2. Determinați coordonatele $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ ale punctelor A', B', C' în reperul $\mathcal{R}$, dacă aceste puncte satisfac condițiile (i), (ii) și (iii).
3. Deduceți că au loc egalitățile

$$\overrightarrow{AA'} = \frac{4}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{7}\overrightarrow{AC} \quad , \quad \overrightarrow{AB'} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{7}\overrightarrow{AC} \quad , \quad \overrightarrow{AC'} = \frac{1}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{7}\overrightarrow{AC}.$$

4. Verificați că $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{C'B'}$, precum și celelalte două egalități care reflectă proprietățile (i), (ii), (iii).
5. Reprezentați într-o figură triunghiul ABC și construiți punctele A', B', C' .
6. Arătați că dacă triunghiul ABC este echilateral, atunci triunghiul $A'B'C'$ este de asemenea echilateral.
7. Arătați, printr-un exemplu, că, în general, triunghiurile ABC și $A'B'C'$ nu sunt asemenea.