

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "GAUDEAMUS" - EDIȚIA A II-A, 2010

CLASA A X A

Oficiu: 10p**Problema 1: 30p**

1) Dacă O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC și H ortocentrul său, demonstrați că

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

2) Într-un plan se dau un punct O , un număr strict pozitiv r și un vector $\bar{u}$. Construiți trei vectori $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ de aceeași mărime r , știind că suma lor este vectorul dat $\bar{u}$.

Soluție: Se considera cercul $\mathcal{C}(O, r)$. Se vor construi punctele A, B, C pe acest cerc.

15p pentru: 1) Metoda 1: se folosește dreapta lui Euler $O-G-H$ cu $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OH}$ și $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

Metoda 2: fie O' este simetricul lui O față de dreapta BC , D mijlocul lui (BC) și H punctul de pe înălțimea din A astfel încât $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OD}$. Atunci $AHO'O$ este paralelogram și $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. Deci $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. Repetând construcția pe o altă înălțime obținem pe aceasta un punct H' cu $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH'}$. Deci $H = H'$, rezultă că H este ortocentrul triunghiului ABC .

15p pentru: 2) Se aplică vectorul $\bar{u}$ în O și se notează cu H extremitatea sa. Problema revine la construirea punctelor A, B, C pe cerc astfel încât H să fie ortocentrul triunghiului ABC . Se alege A arbitrar pe cerc, se completează paralelogramul $HAOO'$, se ia D mijlocul lui (OO') și se considera perpendiculara d în D pe OO' . Intersecția dintre d și cerc determină punctele B, C . Întrucât A a fost ales arbitrar pe cerc, problema are o infinitate de soluții

Problema 2: 30p

Se consideră $\mathcal{P} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mulțimea punctelor de coordonate întregi din plan. Spunem că un punct $A \in \mathcal{P}$ este vizibil (din punctul $O = (0, 0)$) dacă segmentul $[OA]$ nu conține puncte interioare, aparținând mulțimii $\mathcal{P}$.

- i) Să se arate că punctul $A \in \mathcal{P}$ este vizibil dacă și numai dacă abscisa și ordonata sa sunt numere prime între ele.
- ii) Să se arate că dacă cercul $\mathcal{C}(O, r)$, cu $r \in \mathbb{N}^*$, conține puncte vizibile atunci $r = 4k + 1$, pentru un $k \in \mathbb{N}$.
- iii) Să se arate că dacă p este număr prim, atunci cercul $\mathcal{C}(O, p)$ conține puncte vizibile dacă și numai dacă $p = 4k + 1$, pentru un $k \in \mathbb{N}^*$.

Soluție:

10p pentru: i) Fie $A = (x, y) \in \mathcal{P}$. Avem că există $B = (x_1, y_1) \in (OA) \cap \mathcal{P}$ dacă și numai dacă $0 < |x_1| < |x|$, $0 < |y_1| < |y|$ și $y_1/x_1 = y/x$. Ultima condiție este echivalentă cu $1 \leq c.m.m.d.c.\{x_1, y_1\} < c.m.m.d.c.\{x, y\}$.

10p pentru: ii) Pentru $r \in \mathbb{N}^*$, presupunem că există $(x, y) \in \mathcal{C}(O, r) \cap \mathcal{P}$ cu x, y prime între ele. Cum x, y, r sunt numere Pitagoreice, rezultă că există $m, n \in \mathbb{Z}^*$ astfel încât

$$x = m^2 - n^2, \quad y = 2mn, \quad r = m^2 + n^2.$$

10p pentru: Deoarece x, y sunt prime între ele, se obține ca și m, n sunt prime între ele. În consecință r din formula de mai sus este de forma $4k + 1$.

iii) Se folosește forma numerelor Pitagoreice pentru numerele x, y și p , precum și faptul că un număr prim este de forma $4k + 1$ dacă și numai dacă se poate scrie ca o sumă de două pătrate.

Problema 3: 30p

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $a_1, a_2, \dots, a_n \in [0, \infty)$ a.î. $S := a_1 + a_2 + \dots + a_n < 1$. Să se arate că

$$1 + S \leq (1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \leq \frac{1}{1 - S}$$

și

$$1 - S \leq (1 - a_1)(1 - a_2) \dots (1 - a_n) \leq \frac{1}{1 + S}.$$

Când au loc egalități?

Soluție În ambele cazuri, inegalitatea din stanga se obține prin inducție după n . După ce se obțin astfel

5p pentru:

$$1 + S \leq (1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n)$$

și

5p pentru:

$$1 - S \leq (1 - a_1)(1 - a_2) \dots (1 - a_n),$$

pentru a arata inegalitățile din dreapta, observăm că

5p pentru:

$$(1 - a_1)(1 - a_2) \dots (1 - a_n)(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \leq 1$$

și atunci

5p pentru:

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \leq \frac{1}{(1 - a_1)(1 - a_2) \dots (1 - a_n)} \leq \frac{1}{1 - S}$$

și

$$(1 - a_1)(1 - a_2) \dots (1 - a_n) \leq \frac{1}{(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n)} \leq \frac{1}{1 + S}.$$

Cazurile de egalitate se deduc din analiza calculelor de mai sus:

- **5p pentru:** inegalitățile din stanga devin egalități dacă și numai dacă toate numerele, eventual cu excepția cel mult a unuia dintre ele, sunt 0,
- **5p pentru:** inegalitățile din stanga devin egalități dacă și numai dacă toate numerele sunt 0.

Orice altă soluție corectă este luată în considerare.