

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "GAUDEAMUS" - EDIȚIA A II-A, 2010

CLASA A XI A

Oficiu: 10p

Problema 1: 30p

Determinați toate mulțimile finite $A \subset \mathbb{R}$ care satisfac proprietatea

$$a \in A \implies a^2 - |a| + 1 \in A.$$

Soluție

5p pentru: Evident, mulțimea vidă este soluție a problemei. Dacă o mulțime nevidă A satisface proprietatea din enunț, atunci ea conține elemente pozitive, întrucât

$$f(a) = a^2 - |a| + 1 = (|a| - 1)^2 + |a| > 0.$$

10p pentru: Arătăm că 1 este unicul element pozitiv din A . Fie $a \in A$ cu $a > 0$ și $a \neq 1$. Atunci $f(a) \in A$ și $f(a) > a$. Inductiv, se verifică că șirul strict crescător $(f^k(a))_{k \in \mathbb{N}}$ este conținut în A , lucru imposibil deoarece A este finită.

10p pentru: Fie $b \in A$ cu $b \leq 0$. Cum $f(b) > 0$, rezultă $f(b) = 1$, ceea ce conduce la $b \in \{-1, 0\}$.

5p pentru: În concluzie, submulțimile lui $\mathbb{R}$ căutate sunt: $\emptyset$, $\{1\}$, $\{0, 1\}$, $\{-1, 1\}$ și $\{-1, 0, 1\}$. ■

Problema 2: 30p

Fie triunghiul ABC , vectorii $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ și punctele M, N, P astfel încât $\overrightarrow{AM} = \lambda \bar{x}$, $\overrightarrow{BN} = \lambda \bar{y}$ și $\overrightarrow{CP} = \lambda \bar{z}$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Se cere locul geometric al centrului de greutate Q al triunghiului (eventual degenerat) MNP când λ variază.

Soluție:

18p pentru: Notăm cu G centrul de greutate al triunghiului ABC și fie O un punct arbitrar. Se obține ca $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OG} + \frac{\lambda}{3}(\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}) \Rightarrow \overrightarrow{GQ} = \frac{\lambda}{3}(\bar{x} + \bar{y} + \bar{z})$.

12p pentru: Dacă $\bar{x} + \bar{y} + \bar{z} = \bar{0}$ rezulta $Q = G$, deci locul geometric căutat este format doar din G .

Dacă $\bar{x} + \bar{y} + \bar{z} \neq \bar{0}$ atunci, deoarece G este punct fix și vectorul $\frac{\lambda}{3}(\bar{x} + \bar{y} + \bar{z})$ este dat, rezulta ca locul geometric este semidreapta cu originea în G , paralela cu direcția vectorului $\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}$ și având "același sens" cu acesta: $\{M/\overrightarrow{GM} = a(\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}), a > 0\}$.

Problema 3: 30p

Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ și $a > 0$ a.î. pentru orice $x \in \mathbb{R}$ are loc relația

$$(0.1) \quad f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{(f(x) - f^2(x))}.$$

Să se arate că f este periodică și să se dea un exemplu de funcție care verifică relația (0.1).

Soluție

5p pentru: Considerăm funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dată prin $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}$. Atunci are loc relația

$$(0.2) \quad g(x+a) = \sqrt{\frac{1}{4} - g^2(x)}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

15p pentru: În particular, g are valori pozitive. Obținem atunci

$$g(x+2a) = \sqrt{\frac{1}{4} - g^2(x+a)} = g(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Deci g este periodică, de perioadă $2a$ și prin urmare f este periodică de aceeași perioadă.

10p pentru: Pentru exemplu, să observăm că o funcție ce satisface relația (0.2) este

$$g(x) = \frac{1}{2} \left| \sin \frac{\pi x}{2a} \right|.$$

Deci putem considera

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \left| \sin \frac{\pi x}{2a} \right| \right).$$

Orice altă soluție corectă este luată în considerare.