

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "GAUDEAMUS" - EDIȚIA A II-A, 2010

CLASA A XII A

Oficiu: 10p

Problema 1: 30p

Se notează cu f_n derivata de ordin n ($n \geq 1$) a funcției $(x^2 - 1)^n$.

- a) Calculați f_1 , f_2 și f_3 .
b) Arătați că există exact n valori $-1 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < 1$ pentru care $f_n(x_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$.
c) Acceptând că are loc o relație de recurență de forma:

$$f_{n+1}(x) = (a_n x + b_n) f_n(x) + c_n f_{n-1}(x)$$

determinați coeficienții a_n , b_n c_n .

Soluție.

9p pentru: a) Simplu calcul: $f_1(x) = 2x$; $f_2(x) = 12x^2 - 4$; $f_3(x) = 120x^3 - 72x$.

12p pentru: b) $(x^2 - 1)^n$ are rădăcinile ± 1 , fiecare cu multiplicitatea n . Urmează ca derivata întâia are rădăcinile ± 1 cu multiplicitatea $n - 1$ și încă o rădăcină pe $(-1, 1)$ (teorema lui Rolle. Prin recurență, derivata de ordin k , $1 \leq k \leq n$, are ± 1 rădăcini de multiplicitate $n - k$ și k rădăcini distincte pe $(-1, 1)$. În concluzie, f_n are n rădăcini distincte pe $(-1, 1)$. Fiind funcție polinom de grad n , acestea sunt toate rădăcinile.

9p pentru: c) Este suficient să scriem

$$(x^2 - 1)^n = x^{2n} - 2nx^{2n-2} + \dots$$

deci

$$f_n(x) = 2n(2n-1) \dots (n+1)x^n - 2n(2n-2)(2n-3) \dots (n-1)x^{n-2} + \dots$$

Identificând coeficienții, se găsește: $a_n = 2(2n+1)$, $b_n = 0$ (pe motive de paritate) și $c_n = -4n^2$.

Observație, care nu se punctează: În continuare, justificăm considerarea relației de recurență.

Relația de recurență care trebuie verificată este:

$$P_n(x) = xP_{n-1}(x) - \frac{(n-1)^2}{(2n-1)(2n-3)} P_{n-2}(x)$$

În primul rând, transformăm termenul $xP_{n-1}(x)$ pe baza formulei lui Leibniz:

$$x f^{(n-1)}(x) = [x f(x)]^{(n-1)} - (n-1) f^{(n-2)}(x)$$

adică:

$$\begin{aligned} xP_{n-1}(x) &= \frac{(n-1)!}{(2n-2)!} x \frac{d^{n-1}(x^2-1)^{n-1}}{dx^{n-1}} = \frac{(n-1)!}{(2n-2)!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} [x(x^2-1)^{n-1}] - \\ &\quad - \frac{(n-1)(n-1)!}{(2n-2)!} \frac{d^{n-2}(x^2-1)^{n-1}}{dx^{n-2}} \end{aligned}$$

Acum punem în evidență derivata de ordin $(n-2)$ din primul membru:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{n!}{(2n)!} \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} = \frac{n!}{(2n)!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} [n \cdot 2x(x^2-1)^{n-1}] = \\ &= \frac{n!}{(2n-1)!} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} [(x^2-1)^{n-1} + 2x^2(n-1)(x^2-1)^{n-2}] = \\ &= \frac{n!}{(2n-1)!} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} [(2n-1)(x^2-1)^{n-1} + 2(n-1)(x^2-1)^{n-2}] \end{aligned}$$

Astfel, egalitatea de verificat devine:

$$\begin{aligned} &\frac{n!}{(2n-1)!} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} [(2n-1)(x^2-1)^{n-1} + 2(n-1)(x^2-1)^{n-2}] = \\ &= \frac{(n-1)!}{(2n-2)!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} [x(x^2-1)^{n-1}] - \frac{(n-1)(n-1)!}{(2n-2)!} \frac{d^{n-2}(x^2-1)^{n-1}}{dx^{n-2}} - \\ &\quad - \frac{(n-2)!}{(2n-4)!} \frac{(n-1)^2}{(2n-1)(2n-3)} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} [(x^2-1)^{n-2}] \end{aligned}$$

Mai transformăm:

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} [x(x^2-1)^{n-1}] = \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} [(2n-1)(x^2-1)^{n-1} + 2(n-1)(x^2-1)^{n-2}]$$

Acum, cei doi membri sunt derivatele de ordin $(n-2)$ a două funcții egale:

$$\begin{aligned} &n(n-1) [(2n-1)(x^2-1)^{n-1} + 2(n-1)(x^2-1)^{n-2}] = \\ &= (2n-1)(n-1) [n(x^2-1)^{n-1} + 2(n-1)(x^2-1)^{n-2}] - 2(n-1)^3(x^2-1)^{n-2} \end{aligned}$$

Problema 2: 30p

Pe o insulă trăiește un grup de cameleoni de trei culori: 17 sunt roșii, 15 sunt verzi, iar 13 sunt galbeni. Dacă doi cameleoni de culori diferite se întâlnesc, atunci fiecare își schimbă culoarea în cea de a treia. Schimbarea culorii unui cameleon se petrece doar în această situație.

De exemplu, dacă un cameleon roșu se întâlnește cu un cameleon verde, atunci ambii devin galbeni.

Se poate să se ajungă la situația că toți cameleonii au aceeași culoare?

Soluție.

20p pentru: Plecând de la $(17, 15, 13)$ și adunând vectori de forma $(2, -1, -1)$, $(-1, 2, -1)$, $(-1, -1, 2)$, trebuie să ajungem la una din stările $(45, 0, 0)$, $(0, 45, 0)$, $(0, 0, 45)$.

10p pentru: Metoda cea mai elegantă este să se lucreze mod. 3 (mod 2 nu da rezultate): adică plecăm de la $(2, 0, 1)$, adunăm $(2, 2, 2)$ și vrem să ajungem la $(0, 0, 0)$, ceea ce este imposibil.

Problema 3: 30p

Fie $\mathcal{M}$ mulțimea matricelor din $M_n(\mathbb{C})$ de forma

$$A(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}.$$

- Arătați că o matrice $B \in M_n(\mathbb{C})$ comută cu toate matricele din $\mathcal{M}$ dacă și numai dacă $B \in \mathcal{M}$.
- Calculați $A(1, 1, 0)^n$.
- Calculați $A(1, 1, 0, \dots, 0)^n$.

Soluție. Observăm mai întâi că o matrice $A \in \mathcal{M}$ este de forma

$$A(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n a_i A_i,$$

unde $A_1 = A(1, 0, \dots, 0)$, $A_2 = A(0, 1, \dots, 0)$, ..., $A_n = A(0, 0, \dots, 1)$. În plus, avem $A_i A_j = A_j A_i$, pentru oricare $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

10p pentru: a) Presupunem că matricea $B = (b_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ satisface $BA = AB$, oricare ar fi $A \in \mathcal{M}$. Atunci $BA_2 = A_2 B$, ceea ce conduce la

$$\begin{cases} b_{11} = b_{22} = \dots = b_{nn} \\ b_{12} = b_{23} = \dots = b_{n-1n} = b_{n1} \\ \vdots \\ b_{1n} = b_{21} = b_{32} = \dots = b_{nn-1}. \end{cases}$$

Notând cele n cantități de mai sus respectiv cu $b_1, b_2, \dots, b_n$, deducem că $B = A(b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathcal{M}$.

Reciproc, dacă $B = A(b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathcal{M}$, atunci avem

$$\begin{aligned} AB &= \left(\sum_{i=1}^n a_i A_i \right) \left(\sum_{j=1}^n b_j A_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j A_i A_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_i b_j A_j A_i = \\ &= \left(\sum_{j=1}^n b_j A_j \right) \left(\sum_{i=1}^n a_i A_i \right) = BA, \end{aligned}$$

oricare ar fi $A = A(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathcal{M}$.

10p pentru: b)

10p pentru: c) Prin inducție după k , se obține

$$A(1, 1, 0, \dots, 0)^k = A(C_k^0, C_k^1, \dots, C_k^k, 0, \dots, 0), \text{ oricare ar fi } k < n.$$

În concluzie,

$$\begin{aligned} A(1, 1, 0, \dots, 0)^n &= A(1, 1, 0, \dots, 0) A(C_{n-1}^0, C_{n-1}^1, \dots, C_{n-1}^{n-1}) = \\ &= A(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^{n-1}, C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1, \dots, C_{n-1}^{n-2} + C_{n-1}^{n-1}) = \\ &= A(2, C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^{n-1}). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Orice altă soluție corectă este luată în considerare.