

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "GAUDEAMUS" - EDIȚIA I, 2009

CLASA A X A

Problema 1

- i) Să se arate că, dacă $3/a^2 + b^2$, unde $a, b \in \mathbb{N}$, atunci $3/a$ și $3/b$.
 ii) Să se arate că nu există $(a, b, c, d) \in \mathbb{N}^4$, $(a, b, c, d) \neq (0, 0, 0, 0)$ astfel încât $a^2 + b^2 = 3(c^2 + d^2)$.

Problema 2

Se consideră n puncte $S = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ dintr-un plan π și n -numere reale $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ astfel încât $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \neq 0$. Spunem că $A' \in \pi$ este centrul de masă al sistemului (S, Λ) dacă există un punct $O \in \pi$ astfel încât

$$\overrightarrow{OA'} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} \overrightarrow{OA_1} + \dots + \frac{\lambda_n}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} \overrightarrow{OA_n}.$$

- i) Să se arate că dacă A' este centrul de masă al sistemului (S, Λ) atunci pentru orice punct $M \in \pi$ are loc

$$\overrightarrow{MA'} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} \overrightarrow{MA_1} + \dots + \frac{\lambda_n}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} \overrightarrow{MA_n}.$$

Pentru un triunghi $A_1A_2A_3$, considerăm $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât $|\lambda_1|$, $|\lambda_2|$ și $|\lambda_3|$ reprezintă lungimile laturilor $[A_2A_3]$, $[A_3A_1]$ și respectiv $[A_1A_2]$.

- ii) Să se arate că $A' \in A_1A_2$ este piciorul bisectoarei interioare (respectiv exterioare) a unghiului $\widehat{A_3}$ dacă și numai dacă A' este centrul de masă al sistemului $(\{A_1, A_2\}, \{\lambda_1, \lambda_2\})$, pentru o anumite alegere a semnelor scalarilor λ_1 și λ_2 .
 iii) Să se arate că $I \in \pi$ este centrul cercului înscris (respectiv centrul unui cerc exînscriș) triunghiului $A_1A_2A_3$ dacă și numai dacă I este centrul de masă al sistemului $(\{A_1, A_2, A_3\}, \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\})$, pentru o anumite alegere a semnelor scalarilor λ_1 , λ_2 și λ_3 .

Problema 3

Fie $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ și $a_1, a_2, \dots, a_n$ numere reale. Construim:

$$S_0 = -a_1 - a_2 - \dots - a_n;$$

$$S_m = a_1 + a_2 + \dots + a_m - (a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n) \text{ pentru orice } m \in \{1, 2, \dots, n-1\};$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Să se arate că există un $m \in \{0, 1, \dots, n\}$ astfel încât $|S_m| \leq \max\{|a_k| \mid k \in \{1, 2, \dots, n\}\}$

Timp de lucru : 3 ore