

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "GAUDEAMUS" - EDIȚIA I, 2009

CLASA A XI A

Problema 1

Două sute de elevi participă la un concurs de matematică, la care se propun 6 probleme. După corectare, se observă că fiecare problemă a fost rezolvată corect de cel puțin 120 de elevi (nu neapărat aceiași pentru fiecare problemă). Arătați că se pot găsi doi participanți, astfel ca fiecare problemă să fi fost rezolvată de cel puțin unul din cei doi.

Problema 2

- i) Fie $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subseteq \mathbb{Z}$ și $f : A \rightarrow A$ o funcție bijectivă. Presupunând că $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ și că $a_i + f(a_i) < a_j + f(a_j)$ pentru orice $i < j$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, să se arate că $f = 1_A$.
- ii) Să se găsească o funcție bijectivă $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ care satisface condițiile $m + f(m) < n + f(n)$ pentru orice $m < n$, $m, n \in \mathbb{Z}$, și să fie diferită de $1_{\mathbb{Z}}$.

Problema 3

Fie $a \in (0, +\infty)$. Într-un plan π , relativ la un sistem de coordonate carteziene xOy , considerăm dreapta de ecuație

$$(\delta_a) : y = ax.$$

Fie $\Pi = [0, 1) \times [0, 1) = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \alpha \in [0, 1), \beta \in [0, 1)\}$.

- (a) Definim $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \Pi$, $f(x, y) = (\{x\}, \{y\})$, unde prin $\{ \}$ am notat partea fracționară. Să se arate că f este periodică, adică există $T \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x + T, y + T) = f(x, y)$ pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- (b) Considerăm restricția f_a , a lui f la dreapta (δ_a) . Să se arate că dacă $a \in \mathbb{Q}$ atunci f_a este de asemenea periodică.

Imaginea lui (δ_a) prin f_a reprezintă o reuniune de segmente paralele cu direcția lui (δ_a) .

- (c) Pentru $a \in \mathbb{Q}$ să se arate că numărul acestor segmente este finit.
Vom nota cu N acest număr.
- (d) Pentru $a = \frac{10}{2009}$ să se determine N . Cât este N pentru $a = \frac{10}{2010}$?
- (e) Ce se poate spune despre imaginea lui (δ_a) prin aplicația f_a când a este număr irațional (de exemplu $\sqrt{2}$)?

Timp de lucru : 3 ore