

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "GAUDEAMUS" - EDIȚIA I, 2009

CLASA A XII A

Problema 1

Fie $A, B \in \mathcal{M}(n, \mathbb{C})$ astfel încât $A + B = I_n, A^2 = A^3$. Să se arate că:

- i) $AB = BA$;
- ii) $I_n - AB$ și $I_n + AB$ sunt inversabile.

Problema 2

Se consideră funcția $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1+x}$.

- i) Să se scrie ecuația tangentei $y = ax + b$ la graficul funcției f , în punctul $x_0 = 0$.
- ii) Să se determine valoarea a pentru care

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1 - \frac{x}{2}}{x^a}$$

există și este diferită de 0.

- iii) Demonstrați că, pentru $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ are loc inegalitatea:

$$\left| f(x) - 1 - \frac{x}{2} \right| \leq \frac{x^2}{2\sqrt{2}}$$

- iv) Fie N numărul natural cu 2010 cifre, toate egale cu 1; adică $N = \underbrace{1111 \dots 11}_{2010 \text{ cifre}}$. Determinați primele

2010 zecimale ale numărului $\sqrt{N}$.

Problema 3

Se cer valorile lui $a \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul

$$\begin{cases} 2^{|x|} + |x| = y + x^2 + a \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

are o unică soluție reală.

Timp de lucru : 3 ore